

Numerik I

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 18 & 17 & 16 \\ 6 & 25 & 24 & 21 \\ 4 & 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie $\det \mathbf{A}[k] \neq 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$.
b) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \ell_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, & \mathbf{L}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \\ \mathbf{L}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{43} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, & \text{und} & \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \end{aligned}$$

derart, dass

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3 \mathbf{R} = \mathbf{A}$$

gilt.

- c) Berechnen Sie

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 29 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(4 P)

Aufgabe 2

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soll mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren gelöst werden. Wieviele Iterationen sind jeweils ungefähr erforderlich, um den Fehler $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2$ um den Faktor 10^{-6} zu reduzieren?
(4 P)

Aufgabe 3

- a) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär und es gelte $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$, wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär ist und $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix darstellt. Es bezeichne $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbf{q}_j \in \mathbb{C}^n$ den j -ten Spaltenvektor von \mathbf{A} bzw. \mathbf{Q} , $j = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j\} = \text{span}\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_j\} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

- b) Berechnen Sie eine QR -Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

und lösen Sie unter Verwendung der QR -Zerlegung das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieraufgabe: Abgabe Dienstag, 13.01.2004 in der Vorlesung

Schreiben Sie in einer der höheren Programmiersprachen ein Programm, das das Gaußsche Eliminationsverfahren (GEV mit Spaltenpivotsuche) durchführt. Das Programm soll

- (i) das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösen, wobei \mathbf{A} eine reelle $n \times n$ -Matrix ist und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sind.
- (ii) die Determinante $\det(\mathbf{A})$ liefern.
- (iii) die LU -Zerlegung der Matrix $\mathbf{P}\mathbf{A}$ in einer $n \times n$ -Matrix $\mathbf{L}\mathbf{U}$ abspeichern (\mathbf{L} unterhalb der Diagonalen von $\mathbf{L}\mathbf{U}$, \mathbf{U} oberhalb und auf der Diagonalen von $\mathbf{L}\mathbf{U}$). \mathbf{P} ist die Permutationsmatrix, die die Zeilenvertauschungen ausführt, welche im Verlauf der Rechnung auftraten.

Abzugeben ist das ausführliche dokumentierte Programm mit den Rechenergebnissen folgender Beispiele:

- a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & -6 & -4 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.55 \\ 7.35 \\ -3.35 \\ -4.55 \end{pmatrix}$$
- b)
$$\begin{pmatrix} 21.547 & -95.510 & -96.121 \\ 10.223 & -91.065 & 7.343 \\ 51.218 & 12.269 & 86.457 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49.93 \\ -12.465 \\ 60.812 \end{pmatrix}$$
- c)
$$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 1.00001 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00001 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$
- d)
$$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 10^{-2} & 1.00001 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00001 \\ 1.01 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$$

(8 P)

Abgabe: Dienstag, 6.1.2004 in der Vorlesung