

Numerik I

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben seien die Werte

$$\begin{aligned}x_0 &= 100 \quad \text{mit} \quad p(x_0) = -1, \\x_1 &= 101 \quad \text{mit} \quad p(x_1) = 2 \\ \text{und} \quad x_2 &= 102 \quad \text{mit} \quad p(x_2) = -1.\end{aligned}$$

Gesucht ist das quadratische Interpolationspolynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ zu den gegebenen Werten.

- Schreiben Sie die resultierenden Gleichungen als lineares Gleichungssystem.
- Lösen Sie das entstandene Gleichungssystem durch Gauß-Elimination.
- Wiederholen Sie die Schritte aus a) und b) für das Interpolationspolynom in der Form $p(x) = b_0 + b_1(x - x_2) + b_2(x - x_2)^2$.

(4 P)

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- Man bestimme $\int_0^1 f(x) dx$ exakt.
- Man berechne mit der Trapezregel einen Näherungswert für $\int_0^1 f(x) dx$.
- Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Fehler.

(4 P)

Aufgabe 3

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = (x - 1)^4 + 2(x - 1)^2(y + 1)^2 + (y + 1)^4 - 2(x - 1)^2 - 2(y + 1)^2 + 1$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\mathbf{F}(x, y) := (\operatorname{grad} f(x, y))^T = 0$$

angewendet werden.

- a) Man berechne $\mathbf{F}(x, y)$ und die Jacobimatrix $\mathbf{JF}(x, y)$.
- b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\mathbf{x}^0 = (1.21, -1.15)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < 10^{-4}$.
- c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.
- d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[-0.2, 2.2] \times [-2.2, 0.2]$.

(4 P)

Aufgabe 4

Man entwickle eine Quadraturformel Q

$$Q(f) = g_0 f(x_0) + g_1 f(1) \approx \int_0^1 f(x) dx,$$

die Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert. (4 P)

Abgabe: Dienstag, 20.1.2004 in der Vorlesung