Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2003/2004**
Prof. Dr. Andreas Meister

Numerik I

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1
Gegeben seien die Werte

$$\begin{array}{rrcllcl} & x_0 & = & 100 & \text{mit} & p(x_0) & = & -1, \\ & x_1 & = & 101 & \text{mit} & p(x_1) & = & 2 \\ \text{und} & x_2 & = & 102 & \text{mit} & p(x_2) & = & -1. \end{array}$$

Gesucht ist das quadratische Interpolationspolynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ zu den gegebenen Werten.

a) Schreiben Sie die resultierenden Gleichungen als lineares Gleichungssystem.

b) Lösen Sie das entstandene Gleichungssystem durch Gauß-Elimination.

c) Wiederholen Sie die Schritte aus a) und b) für das Interpolationspolynom in der Form $p(x) = b_0 + b_1(x - x_2) + b_2(x - x_2)^2$.

(4 P)

Aufgabe 2
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Man bestimme $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ exakt.

b) Man berechne mit der Trapezregel einen Näherungswert für $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

c) Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Fehler.

(4 P)

Aufgabe 3
Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x,y) = (x-1)^4 + 2(x-1)^2(y+1)^2 + (y+1)^4 - 2(x-1)^2 - 2(y+1)^2 + 1$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x,y) := (\mathrm{grad} f(x,y))^T = 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x,y)$ und die Jacobimatrix $\boldsymbol{JF}(x,y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (1.21, -1.15)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\|_\infty < 10^{-4}$.

c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.

d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[-0.2, 2.2] \times [-2.2, 0.2]$.

(4 P)

Aufgabe 4

Man entwickle eine Quadraturformel Q

$$Q(f) = g_0 f(x_0) + g_1 f(1) \approx \int_0^1 f(x)\,dx,$$

die Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert. (4 P)

Abgabe: Dienstag, 20.1.2004 in der Vorlesung