Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2004/2005**
Prof. Dr. Andreas Meister

Numerik I für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1
(Lineares Ausgleichsproblem)

a) Zu den gegeben Stützpunkten

k	1	2	3	4
x_k	1	4	3	2
f_k	4	1	7	3

bestimme man das Polynom $p \in \Pi_1$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{4} (f_k - p(x_k))^2 \leq \sum_{k=1}^{4} (f_k - q(x_k))^2$$

für alle $q \in \Pi_1$ gilt.

b) Zu den gegeben Stützpunkten

k	1	2	3
x_k	1	2	4
f_k	0	-2	0

bestimme man das Polynom $p \in \Pi_2$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{3} (f_k - p(x_k))^2 \leq \sum_{k=1}^{3} (f_k - q(x_k))^2$$

für alle $q \in \Pi_2$ gilt.

Aufgabe 2
(Interpolation)
Gegeben seien die Funktion $f(x) = x^2(\sin x + \cos x)$ und die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ und $x_2 = \pi$.

a) Man bestimme das interpolierende Polynom $p \in \Pi_2$ mit

$$f(x_i) = p(x_i) \quad i = 0, 1, 2.$$

b) Schätzen Sie den Fehler $\|f - p\|_\infty$ im Intervall $[0, \pi]$ ab.

Aufgabe 3
(Lineares Ausgleichsproblem)
Gegeben seien die Messdaten (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$, mit

t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	3	3	4	3

.

Man bestimme hierzu

a) eine Ausgleichsgerade $g(t) = a_1 + a_2 t$, (d.h. a_1, a_2, so dass $\sum_{i=1}^{5}(y_i - g(t_i))^2$ minimal ist) und

b) eine Ausgleichsparabel $p(t) = b_1 + b_2 t^2$, (d.h. b_1, b_2, so dass $\sum_{i=1}^{5}(y_i - p(t_i))^2$ minimal ist).

Aufgabe 4
(Lineares Ausgleichsproblem)
Für den Bremsweg s eines Autos als Funktion der Geschwindigkeit v liegen die folgenden Messwerte vor:

v_i[km/h]	10	20	25	30	40	50
s_i[m]	4	10	14	20	30	42

.

Gesucht ist eine quadratische Abhängigkeit der Form

$$s = s(v) = av^2 + bv \,.$$

Man transformiere zunächst auf die Größe $z := s/v$ und bestimme dann a und b mit der Methode der kleinsten Quadrate, so dass $\sum_{i=1}^{6}(z(v_i) - z_i)^2$ minimal wird.

Aufgabe 5
(Lineares Gleichungssystem)

a) Man berechne die $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 18 & 3 & 3 \\ 27 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Man löse hiermit die linearen Gleichungssysteme
(i) $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} -7 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$ und (ii) $\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6
(Interpolation)
Ermitteln Sie mittels des Neville-Schemas den Wert des durch die Punkte

k	0	1	2
x_k	0	1	3
f_k	5	4	14

festgelegten Interpolationspolynoms $p \in \Pi_2$ an der Stelle $x = 2$.

Aufgabe 7
(Interpolation)
Berechnen Sie mittels der Newtonschen Interpolationsformel das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ zur Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2$ bezüglich der Stellen

k	0	1	2
x_k	0	2	3

Ermitteln Sie $|f(-1) - p(-1)|$ exakt und schätzen Sie den Fehler unter Verwendung von Satz 1.14 ab.

Aufgabe 8
(Numerische Integration)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \cos x$.

a) Man bestimme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ exakt.

b) Man berechne mit der zusammengesetzten Simpson-Regel mit einer Schrittweite von $h = \dfrac{\pi}{8}$ einen Näherungswert für $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch und vergleiche mit dem tatsächlichen Fehler.

Aufgabe 9
(Iterative Gleichungssystemlöser)
Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Untersuchen Sie das Jacobi-Verfahren auf Konvergenz für die Matrizen

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10
(Iterative Gleichungssystemlöser)
Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Untersuchen Sie das Gauß-Seidel-Verfahren auf Konvergenz für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Besprechung: **Dienstag, den 8. Februar 2005**