

Begleitmaterial zur Vorlesung Numerik linearer Gleichungssysteme

Andreas Meister

Universität Kassel, AG Analysis und Angewandte Mathematik

Modellproblem (Buch – Seite 101) $N_3 = 15$

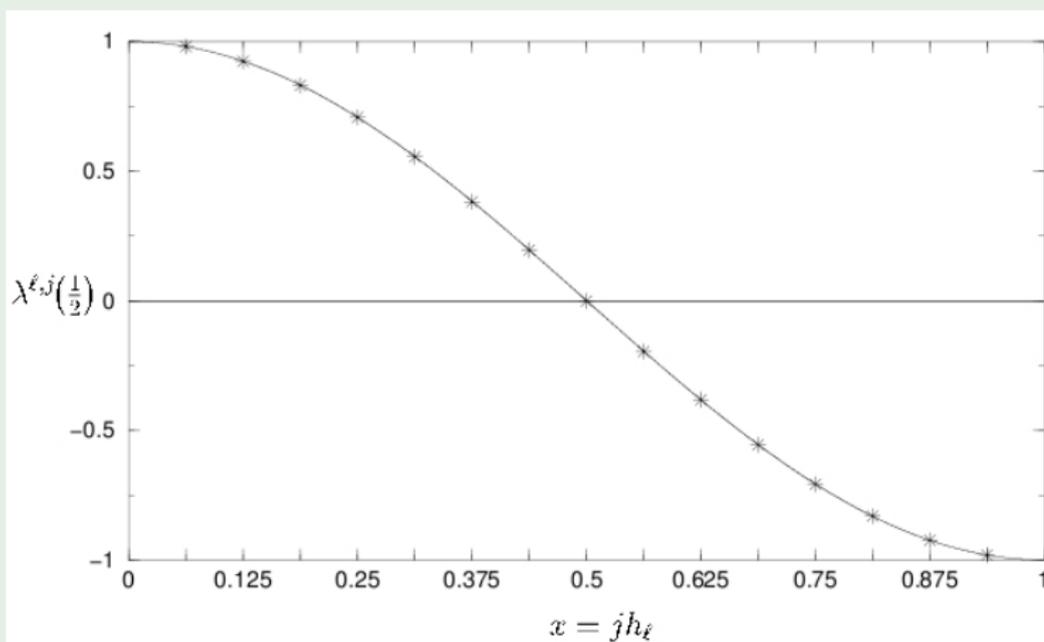


Abbildung: Eigenwertverteilung des Jacobi-Verfahrens ($\omega = \frac{1}{2}$)

Modellproblem (Buch – Seite 102) $N_3 = 15$

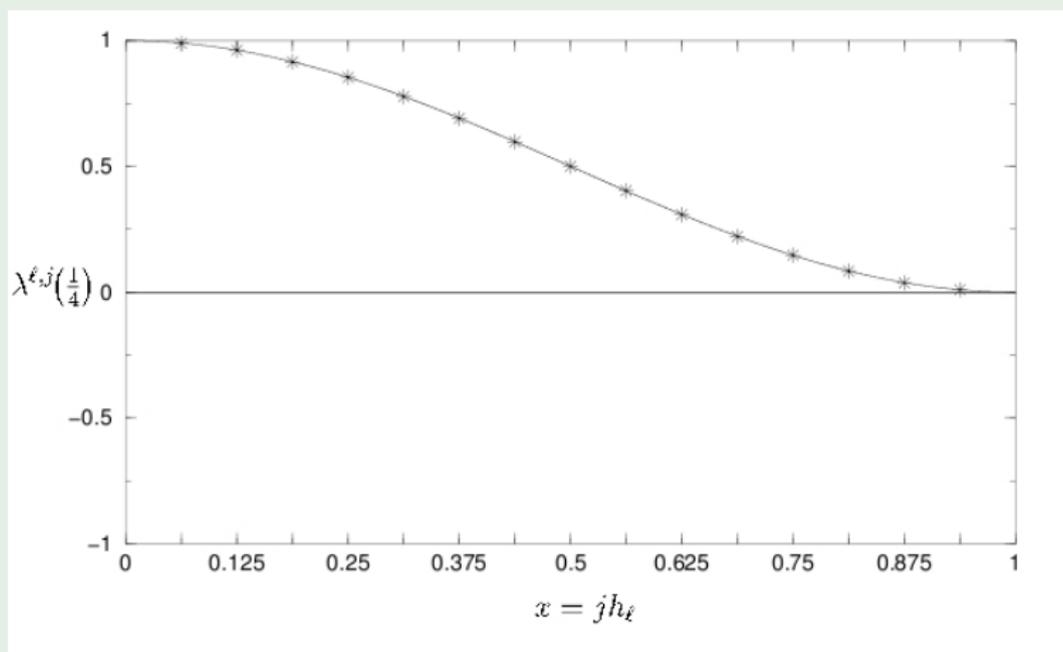


Abbildung: Eigenwertverteilung des gedämpften Jacobi-Verfahrens ($\omega = \frac{1}{4}$)

Modellproblem (Buch – Seite 103) $N_3 = 15$

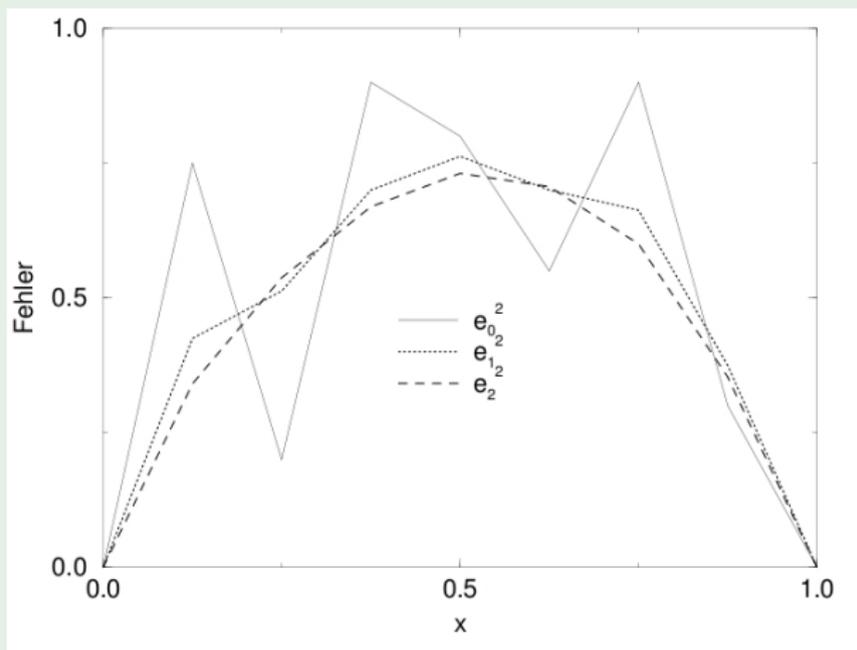


Abbildung: Entwicklung des Fehlers beim gedämpften Jacobi-Verfahren

Definition 1.2: (Buch – Definition 4.39)

Sei \mathbf{u}_j^ℓ eine Näherungslösung der Gleichung $\mathbf{A}_\ell \mathbf{u}^\ell = \mathbf{f}^\ell$, dann heißt die Methode

$$\mathbf{u}_j^{\ell, \text{neu}} = \phi_\ell^{\text{GGK}} \left(\mathbf{u}_j^\ell, \mathbf{f}^\ell \right)$$

mit

$$\phi_\ell^{\text{GGK}} \left(\mathbf{u}_j^\ell, \mathbf{f}^\ell \right) = \mathbf{u}_j^\ell - \mathbf{P}_{\ell-1}^\ell \mathbf{A}_{\ell-1}^{-1} \mathbf{R}_\ell^{\ell-1} \left(\mathbf{A}_\ell \mathbf{u}_j^\ell - \mathbf{f}^\ell \right)$$

Grobgitterkorrekturverfahren.

Lemma 1.3: (Buch – Lemma 4.40)

Die Grobgitterkorrekturmethode ϕ_ℓ^{GGK} stellt ein lineares konsistentes Iterationsverfahren mit

$$\mathbf{M}_\ell^{\text{GGK}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\ell-1}^\ell \mathbf{A}_{\ell-1}^{-1} \mathbf{R}_\ell^{\ell-1} \mathbf{A}_\ell$$

und

$$\mathbf{N}_\ell^{\text{GGK}} = \mathbf{P}_{\ell-1}^\ell \mathbf{A}_{\ell-1}^{-1} \mathbf{R}_\ell^{\ell-1}$$

dar.

Lemma 1.6: (Buch – Lemma 4.43)

Sind ϕ, ψ zwei lineare Iterationsverfahren mit den Iterationsmatrizen \mathbf{M}_ϕ und \mathbf{M}_ψ , dann gilt:

- 1 Sind ϕ und ψ konsistent, dann ist auch die Produktiteration $\phi \circ \psi$ konsistent.
- 2 Die Iterationsmatrix der Produktiteration $\phi \circ \psi$ hat die Form

$$\mathbf{M}_{\phi \circ \psi} = \mathbf{M}_\phi \mathbf{M}_\psi.$$

- 3 Die beiden Produktiterationen $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ besitzen die gleichen Konvergenzeigenschaften im Sinne von

$$\rho(\mathbf{M}_{\phi \circ \psi}) = \rho(\mathbf{M}_{\psi \circ \phi}).$$

Satz 1.7: (Buch – Lemma 4.44)

Sei ϕ_ℓ ein konsistentes Iterationsverfahren mit Iterationsmatrix \mathbf{M}_ℓ , dann ist das Zweigitteriterationsverfahren $\phi_\ell^{\text{ZGM}(\nu_1, \nu_2)}$ konsistent mit der Iterationsmatrix

$$\mathbf{M}_\ell^{\text{ZGM}(\nu_1, \nu_2)} = \mathbf{M}_\ell^{\nu_2} \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\ell-1}^\ell \mathbf{A}_{\ell-1}^{-1} \mathbf{R}_\ell^{\ell-1} \mathbf{A}_\ell \right) \mathbf{M}_\ell^{\nu_1}.$$

Nassi-Diagramm (Buch – Seite 109)

Für $i = 1, \dots, \nu_1$

$$\mathbf{u}^\ell := \phi_\ell(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{f}^\ell)$$

$$\mathbf{d}^{\ell-1} := \mathbf{R}_\ell^{\ell-1} (\mathbf{A}_\ell \mathbf{u}^\ell - \mathbf{f}^\ell)$$

$$\mathbf{e}^{\ell-1} := \mathbf{A}_{\ell-1}^{-1} \mathbf{d}^{\ell-1}$$

$$\mathbf{u}^\ell := \mathbf{u}^\ell - \mathbf{P}_{\ell-1}^\ell \mathbf{e}^{\ell-1}$$

Für $i = 1, \dots, \nu_2$

$$\mathbf{u}^\ell := \phi_\ell(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{f}^\ell)$$

Modellproblem (Buch – Seite 107) $N_3 = 15$

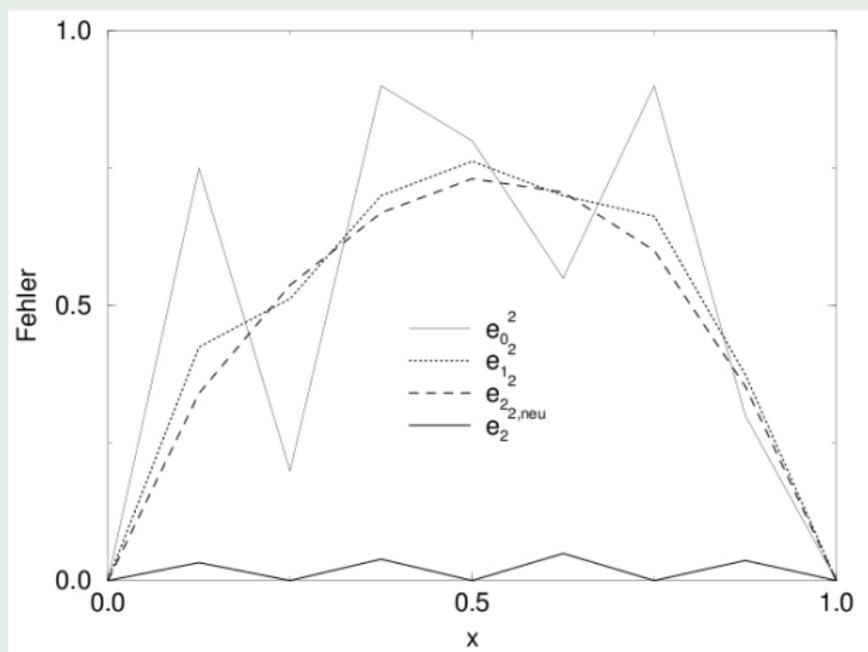
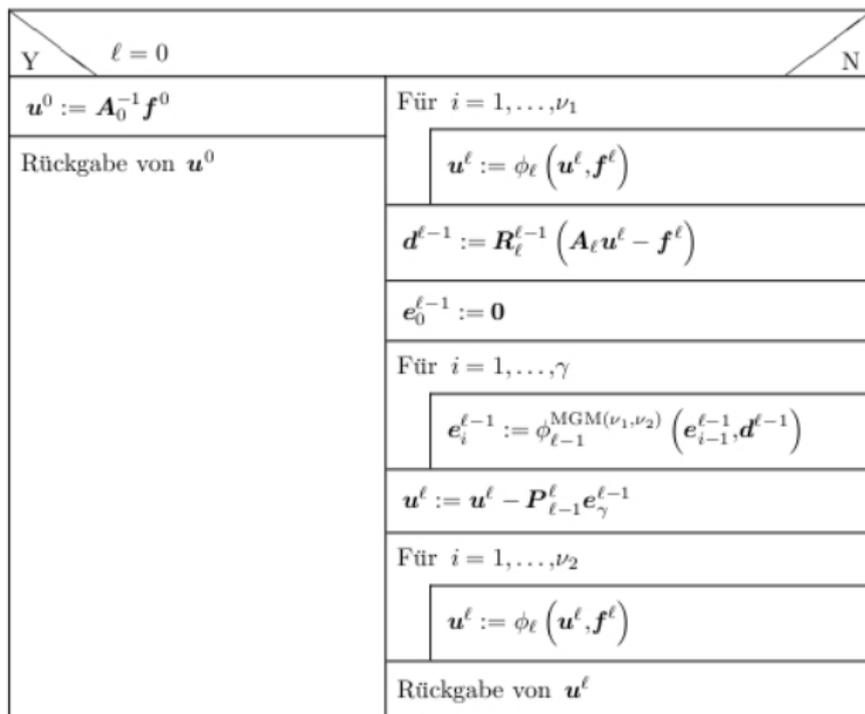
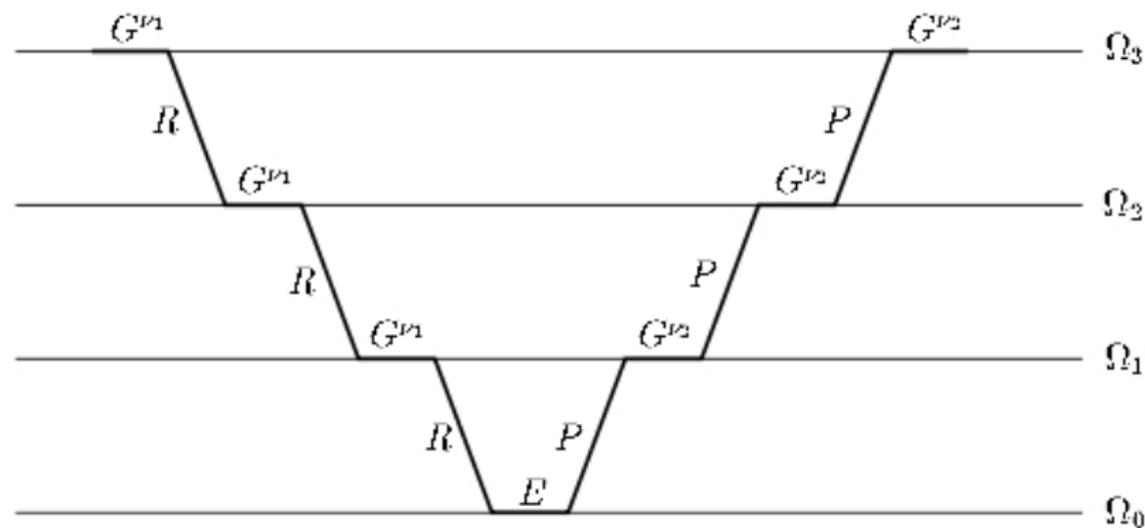


Abbildung: Entwicklung des Fehlers beim Zweigitterverfahren

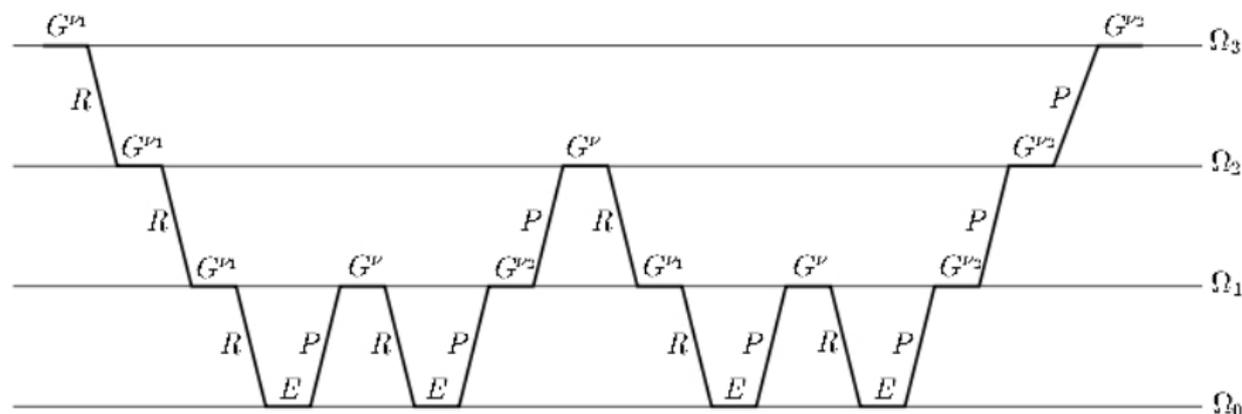
Nassi-Diagramm (Buch – Seite 110)



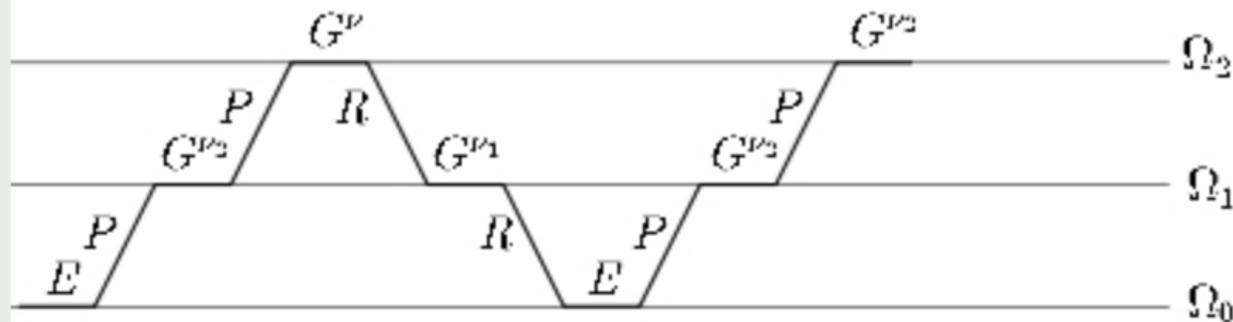
V-Zyklus $\gamma = 1, l = 3$ (Buch – Seite 111)



W-Zyklus $\gamma = 2, l = 3$ (Buch – Seite 111)



V-Zyklus $\gamma = 2, l = 2$ (Buch – Seite 112)



Definition 2.1: (Buch – Definition 4.45)

Eine Projektionsmethode zur Lösung der Gleichung (2.1) ist ein Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen $\mathbf{x}_m \in \mathbf{x}_0 + K_m$ unter Berücksichtigung der Bedingung

$$(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m) \perp L_m,$$

wobei $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig ist und K_m sowie L_m m -dimensionale Unterräume des \mathbb{R}^n repräsentieren.

Gilt $K_m = L_m$, so sprechen wir von einer orthogonalen Projektionsmethode.

Für $K_m \neq L_m$ liegt sprechen wir von einer schiefen Projektionsmethode. Der Vektor $\mathbf{r}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m$ heißt Residuenvektor.

Definition 2.2: (Buch – Definition 4.47)

Eine Krylov-Unterraum-Methode ist eine Projektionsmethode, bei der K_m den Krylov-Unterraum

$$K_m = K_m(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0) = \text{span} \left\{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{r}_0 \right\}$$

mit $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ darstellt.

Verfahren des steilsten Abstiegs (Buch – Seite 119)

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Für $m = 0, 1, \dots$

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m$$

Y

$$\mathbf{r}_m \neq \mathbf{0}$$

N

$$\lambda_m = \frac{\|\mathbf{r}_m\|_2^2}{(\mathbf{A}\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_m)_2}$$

$$\lambda_m = 0$$

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m + \lambda_m \mathbf{r}_m$$

Beispiel 2.6: (Buch – Seite 122)

Verfahren des steilsten Abstiegs (Gradientenverfahren)				
m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\varepsilon_m := \ \mathbf{x}_m - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\ _{\mathbf{A}}$	$\varepsilon_m/\varepsilon_{m-1}$
0	4.000000e+00	1.341641e+00	7.071068e+00	
10	3.271049e-02	1.097143e-02	5.782453e-02	6.183904e-01
40	1.788827e-08	5.999910e-09	3.162230e-08	6.183904e-01
70	9.782499e-15	3.281150e-15	1.729318e-14	6.183904e-01
72	3.740893e-15	1.254734e-15	6.613026e-15	6.183904e-01

Abbildung: Konvergenzverlauf

Beispiel 2.6: (Buch – Seite 122)

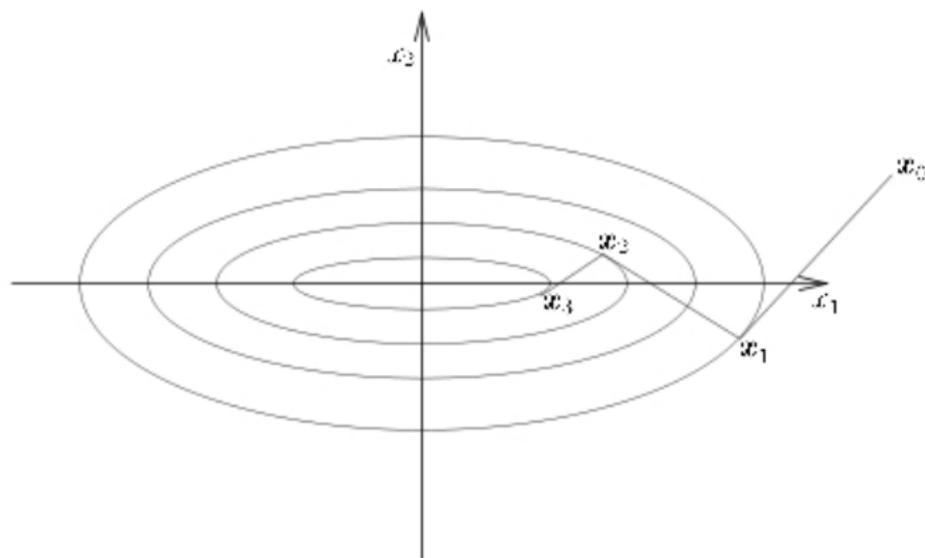


Abbildung: Höhenlinien zu $F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = x_1^2 + 5x_2^2$

Verfahren der konjugierten Richtungen (Buch – Seite 126)

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

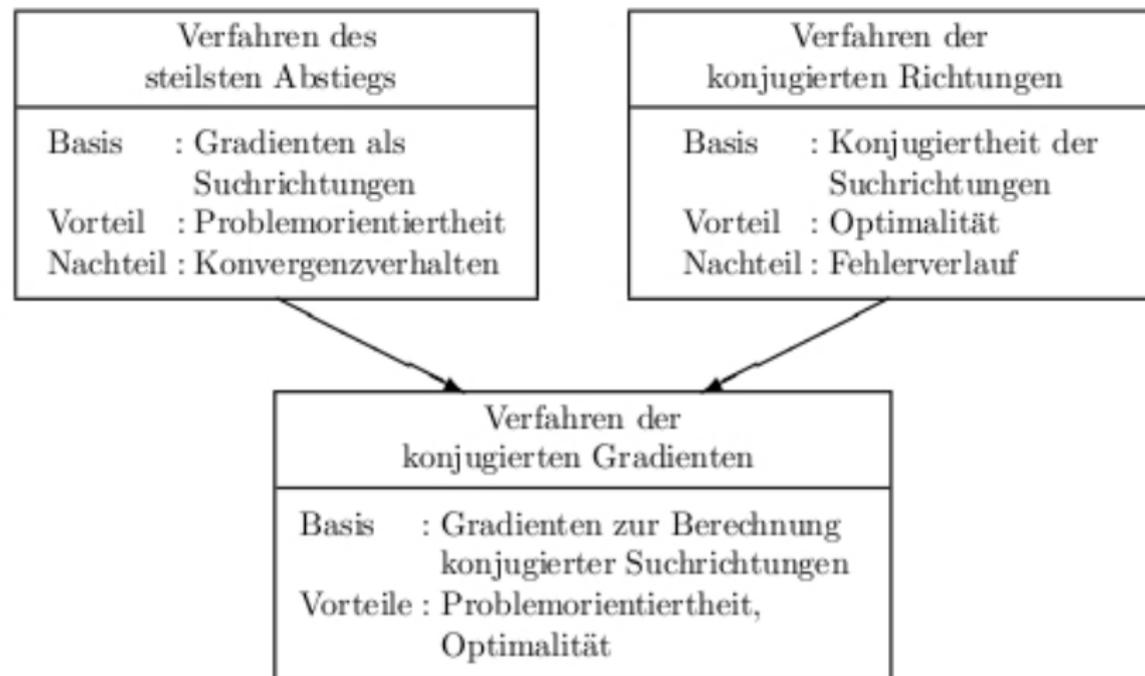
Für $m = 0, \dots, n-1$

$$\lambda_m := \frac{(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_m)_2}{(\mathbf{A}\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m)_2}$$

$$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m + \lambda_m \mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{r}_{m+1} := \mathbf{r}_m - \lambda_m \mathbf{A}\mathbf{p}_m$$

Zusammenhänge (Buch – Seite 127)



Vorläufiges CG-Verfahren (Buch – Seite 127)

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

Für $m = 0, \dots, n-1$

$$\lambda_m := \frac{(\mathbf{r}_m, \mathbf{p}_m)_2}{(\mathbf{A}\mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m)_2}$$

$$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m + \lambda_m \mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{r}_{m+1} := \mathbf{r}_m - \lambda_m \mathbf{A}\mathbf{p}_m$$

$$\mathbf{p}_{m+1} := \mathbf{r}_{m+1} - \sum_{j=0}^m \frac{(\mathbf{A}\mathbf{r}_{m+1}, \mathbf{p}_j)_2}{(\mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j)_2} \mathbf{p}_j \quad (4.3.19)$$

Satz 2.14: (Buch – Satz 4.62)

Vorausgesetzt, das vorläufige CG-Verfahren bricht nicht vor der Berechnung von \mathbf{p}_k für $k > 0$ ab, dann gilt

- (a) \mathbf{p}_m ist konjugiert zu allen \mathbf{p}_j mit $0 \leq j < m \leq k$,
- (b) $U_{m+1} := \text{span} \{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m\} = \text{span} \{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_m\}$ mit $\dim U_{m+1} = m + 1$ für $m = 0, \dots, k - 1$,
- (c) $\mathbf{r}_m \perp U_m$ für $m = 1, \dots, k$,
- (d) $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \iff \mathbf{r}_k = \mathbf{0} \iff \mathbf{p}_k = \mathbf{0}$,
- (e) $U_{m+1} = \text{span} \{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^m \mathbf{r}_0\}$ für $m = 0, \dots, k - 1$,
- (f) \mathbf{r}_m ist konjugiert zu allen \mathbf{p}_j mit $0 \leq j < m - 1 < k - 1$.

CG-Verfahren (Buch – Seite 130)

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad \alpha_0 := \|\mathbf{r}_0\|_2^2$$

Für $m = 0, \dots, n-1$

Y	$\alpha_m \neq 0$	N	
$\mathbf{v}_m := \mathbf{A}\mathbf{p}_m, \quad \lambda_m := \frac{\alpha_m}{(\mathbf{v}_m, \mathbf{p}_m)_2}$	STOP		
$\mathbf{x}_{m+1} := \mathbf{x}_m + \lambda_m \mathbf{p}_m$			
$\mathbf{r}_{m+1} := \mathbf{r}_m - \lambda_m \mathbf{v}_m$			
$\alpha_{m+1} := \ \mathbf{r}_{m+1}\ _2^2$			
$\mathbf{p}_{m+1} := \mathbf{r}_{m+1} + \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \mathbf{p}_m$			

Beispiel 2.15(a): (Buch – Beispiel 4.63)

Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)

m	$u_{m,1}$	$u_{m,2}$	$u_{m,3}$	$u_{m,4}$	$u_{m,5}$	$u_{m,6}$	$u_{m,7}$	$\ \mathbf{r}_m\ _2$
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1336.36
1	0.58	-2.04	3.21	-3.79	2.33	0.58	1.46	363.57
2	-0.39	-1.72	2.81	-4.57	3.00	4.99	4.26	252.76
3	-0.01	-2.38	2.06	-3.53	4.87	6.07	6.25	153.30
4	-0.14	-2.88	2.57	-2.13	6.50	7.48	5.93	117.64
5	-0.70	-2.18	3.53	-1.12	7.65	7.81	6.27	103.52
6	0.13	-1.14	5.40	0.54	8.23	8.54	6.98	89.70
7	1.00	0.00	6.00	1.00	9.00	9.00	7.00	0.00

Beispiel 2.15: (Buch – Beispiel 4.64)

	CG-Verfahren	Jacobi-Verfahren
Iterationen	Residuenverlauf	
0	140.348	140.348
150	1.83245	134.735
300	2.40822e-05	131.221
450	1.77391e-12	128.135
600	1.88161e-15	125.292
641	8.91038e-17	124.547

Satz 2.17: (Buch – Satz 4.65)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit und $\{\mathbf{x}_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ die durch das Verfahren der konjugierten Gradienten erzeugte Folge von Näherungslösungen. Dann erfüllt der zu \mathbf{x}_m korrespondierende Fehlervektor $\mathbf{e}_m = \mathbf{x}_m - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{e}_m\|_{\mathbf{A}} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\text{cond}_2(\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{\text{cond}_2(\mathbf{A})} + 1} \right)^m \|\mathbf{e}_0\|_{\mathbf{A}}.$$

Arnoldi-Algorithmus (Buch – Seite 136)

$v_1 := \frac{r_0}{\ r_0\ _2}$	
Für $j = 1, \dots, m$	
Für $i = 1, \dots, j$	
$h_{ij} := (v_i, Av_j)_2 \quad (4.3.30)$	
$w_j := Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}v_i \quad (4.3.31)$	
$h_{j+1,j} := \ w_j\ _2 \quad (4.3.32)$	
Y	$h_{j+1,j} \neq 0$
$v_{j+1} := \frac{w_j}{h_{j+1,j}} \quad (4.3.33)$	
	$v_{j+1} := \mathbf{0}$
	STOP

Satz 2.18: (Buch – Satz 4.66)

Vorausgesetzt, der Arnoldi-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{0}$ ab, dann stellt $\mathcal{V}_j = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$ eine Orthonormalbasis des j -ten Krylov-Unterraums K_j für $j = 1, \dots, m$ dar.

Satz 2.19: (Buch – Satz 4.67)

Vorausgesetzt, der Arnoldi-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{0}$ ab, dann erhalten wir unter Verwendung von $\mathbf{V}_m = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit

$$\mathbf{H}_m := \mathbf{V}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

eine obere Hessenbergmatrix, für die

$$(\mathbf{H}_m)_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & \text{aus dem Arnoldi-Algorithmus für } i \leq j + 1, \\ 0 & \text{für } i > j + 1 \end{cases}$$

gilt.

Satz 2.20: (Buch – Satz 4.68)

Vorausgesetzt, der Arnoldi-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von \mathbf{v}_{m+1} ab, dann gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{m+1}\bar{\mathbf{H}}_m,$$

wobei $\bar{\mathbf{H}}_m \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$ durch

$$\bar{\mathbf{H}}_m = \begin{pmatrix} & \mathbf{H}_m & \\ 0 \dots 0 & h_{m+1,m} & \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

FOM (Buch – Seite 138)

Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$.	
$r_0 := b - Ax_0$	
$r_0 \neq 0$	
Y	N
Berechne V_m und H_m gemäß dem Arnoldi-Algorithmus unter Verwendung von r_0	STOP
$\alpha_m := \ r_0\ _2 H_m^{-1} e_1$	
$x_m := x_0 + V_m \alpha_m$	

Restarted FOM (Buch – Seite 139)

Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$.

$$r_0 := b - Ax_0$$

Solange $\|r_0\|_2 > \varepsilon$

Berechne V_m und H_m gemäß Arnoldi-Algorithmus unter Verwendung von r_0

$$\alpha_m := \|r_0\|_2 H_m^{-1} e_1$$

$$x_m := x_0 + V_m \alpha_m$$

$$x_0 := x_m$$

$$r_0 := b - Ax_0$$

Lemma 2.23: (Buch – Lemma 4.75)

mit
$$a := (\mathbf{G}_{i,i-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_{3,2} \cdot \mathbf{G}_{2,1} \bar{\mathbf{H}}_m)_{i,i}$$

und
$$b := (\mathbf{G}_{i,i-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_{3,2} \cdot \mathbf{G}_{2,1} \bar{\mathbf{H}}_m)_{i+1,i}$$

definiert sind. Dann stellt $\mathbf{Q}_m := \mathbf{G}_{m+1,m} \cdot \dots \cdot \mathbf{G}_{2,1}$ eine orthogonale Matrix dar, für die $\mathbf{Q}_m \bar{\mathbf{H}}_m = \bar{\mathbf{R}}_m$ mit

$$\bar{\mathbf{R}}_m = \begin{pmatrix} \bar{r}_{11} & \dots & \dots & \bar{r}_{1m} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \bar{r}_{mm} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{R}_m \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$$

gilt und \mathbf{R}_m regulär ist.

GMRES (Buch – Seite 156)

Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n$				
$r_0 := b - Ax_0$				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">Y</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">$r_0 = 0$</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">N</td> </tr> </table>		Y	$r_0 = 0$	N
Y	$r_0 = 0$	N		
$x := x_0$	$v_1 := \frac{r_0}{\ r_0\ _2}, \gamma_1 := \ r_0\ _2$			
	Für $j = 1, \dots, n$			
	Für $i = 1, \dots, j$ setze $h_{ij} := (v_i, Av_j)_2$			
	$w_j := Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i, \gamma_{j+1,j} := \ w_j\ _2$			
	Für $i = 1, \dots, j-1$			
	$\begin{pmatrix} h_{ij} \\ h_{i+1,j} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{ij} \\ h_{i+1,j} \end{pmatrix}$			
	$\beta := \sqrt{h_{j,j}^2 + h_{j+1,j}^2}; s_j := \frac{h_{j+1,j}}{\beta}$			
	$c_j := \frac{h_{j,j}}{\beta}; h_{j,j} := \beta$			
	$\gamma_{j+1} := -s_j \gamma_j; \gamma_j := c_j \gamma_j$			
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center;">Y</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">$\gamma_{j+1} = 0$</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">N</td> </tr> </table>	Y	$\gamma_{j+1} = 0$	N
Y	$\gamma_{j+1} = 0$	N		
	Für $i = j, \dots, 1$			
	$\alpha_i := \frac{1}{h_{ii}} \left(\gamma_i - \sum_{k=i+1}^j h_{ik} \alpha_k \right)$			
	$x := x_0 + \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i$			
	STOP			
	$v_{j+1} := \frac{w_j}{\gamma_{j+1,j}}$			

Satz 2.24: (Buch – Satz 4.76)

Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix sowie $h_{j+1,j}$ und \mathbf{w}_j durch den Arnoldi-Algorithmus gegeben und gelte $j < n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- 1 Für die Folge der Krylov-Unterräume gilt

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j = K_{j+1} = \dots$$

- 2 Das GMRES-Verfahren liefert im j -ten Schritt die exakte Lösung.
- 3 $\mathbf{w}_j = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- 4 $h_{j+1,j} = 0$.

Restarted GMRES (Buch – Seite 160)

Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$	
$restart := 0$; $r_0 := b - Ax_0$	
Y $r_0 = 0$ N	
$x := x_0$	$v_1 := \frac{r_0}{\ r_0\ _2}$, $\gamma_1 := \ r_0\ _2$ Für $j = 1, \dots, m$ Für $i = 1, \dots, j$ setze $h_{ij} := (v_i, Av_j)_2$ $w_j := Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i$, $h_{j+1,j} := \ w_j\ _2$ Für $i = 1, \dots, j-1$ $\begin{pmatrix} h_{ij} \\ h_{i+1,j} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{ij} \\ h_{i+1,j} \end{pmatrix}$ $\beta := \sqrt{h_{jj}^2 + h_{j+1,j}^2}$, $s_j := \frac{h_{j+1,j}}{\beta}$, $c_j := \frac{h_{jj}}{\beta}$ $h_{jj} := \beta$, $\gamma_{j+1} := -s_j \gamma_j$, $\gamma_j := c_j \gamma_j$ Y $\gamma_{j+1} \leq \epsilon$ N Für $i = j, \dots, 1$ $\alpha_i := \frac{1}{h_{ii}} \left(\gamma_i - \sum_{k=i+1}^j h_{ik} \alpha_k \right)$ $x := x_0 + \sum_{i=1}^j \alpha_i v_i$ STOP Für $i = m, \dots, 1$ $\alpha_i := \frac{1}{h_{ii}} \left(\gamma_i - \sum_{k=i+1}^m h_{ik} \alpha_k \right)$ $x := x_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ $x_0 := x$, $r_0 := b - Ax_0$, $restarts := restarts + 1$ solange $restart \leq$ Maximale Anzahl von Restarts

Satz 2.25: (Buch – Satz 4.77)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und \mathbf{r}_m der im GMRES-Verfahren ermittelte m -te Residuenvektor, dann konvergiert das GMRES-Verfahren, und es gilt

$$\|\mathbf{r}_m\|_2 \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}^2 \left(\frac{\mathbf{A}^T + \mathbf{A}}{2} \right)}{\lambda_{\max} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)} \right)^{\frac{m}{2}} \|\mathbf{r}_0\|_2.$$

Korollar 2.26: (Buch – Korollar 4.78)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und symmetrisch. Zudem sei \mathbf{r}_m der im GMRES-Verfahren ermittelte m -te Residuenvektor, dann konvergiert das GMRES-Verfahren und es gilt

$$\|\mathbf{r}_m\|_2 \leq \left(\frac{\text{cond}_2^2(\mathbf{A}) - 1}{\text{cond}_2^2(\mathbf{A})} \right)^{\frac{m}{2}} \|\mathbf{r}_0\|_2.$$

Satz 2.27: (Buch – Satz 4.79)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, dann konvergiert das GMRES(m)-Verfahren für $m \geq 1$.

Satz 2.28: (Buch – Satz 4.80)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und symmetrisch, dann konvergiert das GMRES(m)-Verfahren für $m \geq 2$.

Lanczos-Algorithmus (Buch – Seite 141)

Algorithmus - Lanczos —

$$\mathbf{v}_1 := \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|_2}, \quad c_1 := 0, \quad \mathbf{v}_0 := \mathbf{0}$$

Für $j = 1, \dots, m$

$$\mathbf{w}_j := \mathbf{A}\mathbf{v}_j - c_j\mathbf{v}_{j-1}$$

$$a_j := (\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j)_2$$

$$\mathbf{w}_j := \mathbf{w}_j - a_j\mathbf{v}_j$$

$$c_{j+1} := \|\mathbf{w}_j\|_2$$

Y $c_{j+1} \neq 0$

N

$$\mathbf{v}_{j+1} := \frac{\mathbf{w}_j}{c_{j+1}}$$

$$\mathbf{v}_{j+1} := \mathbf{0}$$

STOP

D-Lanczos-Verfahren (Buch – Seite 143)

D-Lanczos-Algorithmus —

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$		
$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$		
Y	$\ \mathbf{r}_0\ _2 > \varepsilon$	N
$\mathbf{v}_1 := \frac{\mathbf{r}_0}{\ \mathbf{r}_0\ _2}$		
$c_1 := \gamma_1 := 0, \xi_1 := 1, \mathbf{p}_0 := \mathbf{v}_0 := \mathbf{0}$		
Für $j = 1, \dots$		
$\mathbf{w}_j := \mathbf{A}\mathbf{v}_j - c_j\mathbf{v}_{j-1}$		
$a_j := (\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j)_2$		
Y	$j > 1$	N
$\gamma_j \stackrel{(4.3.42)}{:=} \frac{c_j}{\beta_{j-1}}, \xi_j \stackrel{(4.3.45)}{:=} -\gamma_j \xi_{j-1}$		
$\beta_j \stackrel{(4.3.43)}{:=} a_j - \gamma_j c_j$		
$\mathbf{p}_j \stackrel{(4.3.44)}{:=} \frac{1}{\beta_j} (\mathbf{v}_j - c_j \mathbf{p}_{j-1}), \mathbf{x}_j \stackrel{(4.3.46)}{:=} \mathbf{x}_{j-1} + \xi_j \mathbf{p}_j$		
Y	$\ \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_j\ _2 > \varepsilon$	N
$\mathbf{w}_j := \mathbf{w}_j - a_j \mathbf{v}_j$		$\mathbf{v}_{j+1} := \mathbf{0}$
$c_{j+1} := \ \mathbf{w}_j\ _2$		STOP
Y	$c_{j+1} \neq 0$	N
$\mathbf{v}_{j+1} := \frac{\mathbf{w}_j}{c_{j+1}}$	$\mathbf{v}_{j+1} := \mathbf{0}$	
	STOP	

Definition 2.29: (Buch – Definition 4.69)

Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \mathbb{R}^n$, dann heißen die beiden Mengen $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ und $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ bi-orthogonal, wenn

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j)_2 = \delta_{ij} c_{ij} \text{ mit } c_{ij} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ für } i, j = 1, \dots, m$$

gilt. Im Fall $c_{ij} = 1$ für $i = 1, \dots, m$ heißen die Mengen bi-orthonormal.

Lemma 2.30: (Buch – Lemma 4.70)

Seien die Mengen $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ und $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ bi-orthogonal, dann gilt

$$\dim \text{span} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \} = m = \dim \text{span} \{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \}$$

Bi-Lanczos-Algorithmus (Buch – Seite 145)

Bi-Lanczos-Algorithmus —

$$h_{1,0} = h_{0,1} := 0$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0 := \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 := \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \quad (4.3.48)$$

für $j = 1, \dots, m$

$$h_{jj} := (\mathbf{w}_j, \mathbf{A} \mathbf{v}_j)_2 \quad (4.3.49)$$

$$\mathbf{v}_{j+1}^* := \mathbf{A} \mathbf{v}_j - h_{jj} \mathbf{v}_j - h_{j-1,j} \mathbf{v}_{j-1} \quad (4.3.50)$$

$$\mathbf{w}_{j+1}^* := \mathbf{A}^T \mathbf{w}_j - h_{jj} \mathbf{w}_j - h_{j,j-1} \mathbf{w}_{j-1} \quad (4.3.51)$$

$$h_{j+1,j} := |(\mathbf{v}_{j+1}^*, \mathbf{w}_{j+1}^*)_2|^{1/2}$$

	$h_{j+1,j} \neq 0$	
Y		N

$h_{j,j+1} := \frac{(\mathbf{v}_{j+1}^*, \mathbf{w}_{j+1}^*)_2}{h_{j+1,j}} \quad (4.3.52)$	$h_{j,j+1} := 0$
--	------------------

$\mathbf{v}_{j+1} := \frac{\mathbf{v}_{j+1}^*}{h_{j+1,j}} \quad (4.3.53)$	$\mathbf{v}_{j+1} := \mathbf{0}$
---	----------------------------------

$\mathbf{w}_{j+1} := \frac{\mathbf{w}_{j+1}^*}{h_{j,j+1}} \quad (4.3.54)$	$\mathbf{w}_{j+1} := \mathbf{0}$
---	----------------------------------

STOP

Satz 2.31: (Buch – Satz 4.71)

Vorausgesetzt, der Bi-Lanczos-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{w}_m \neq \mathbf{0}$ ab, dann stellen $\mathcal{V}_j = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j\}$ und $\mathcal{W}_j = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_j\}$ eine Basis des Krylov-Unterraums K_j beziehungsweise K_j^T für $j = 1, \dots, m$ dar. Zudem erfüllen die Basisvektoren die Bi-Orthogonalitätsbedingung mit $c_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, m$.

Satz 2.32: (Buch – Satz 4.72)

Vorausgesetzt, der Bi-Lanczos-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{w}_m \neq \mathbf{0}$ ab, dann seien $\mathbf{V}_m = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{W}_m = (\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die aus den ermittelten Basisvektoren des K_m und K_m^T gebildeten Matrizen. Desweiteren seien h_{ij} die im Algorithmus auftretenden skalaren Größen, dann gelten die Gleichungen

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{W}_m^T \mathbf{A} \mathbf{V}_m$$

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m \mathbf{T}_m + h_{m+1,m} \mathbf{v}_{m+1} \mathbf{e}_m^T$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m = \mathbf{W}_m \mathbf{T}_m^T + h_{m,m+1} \mathbf{w}_{m+1} \mathbf{e}_m^T$$

mit $\mathbf{e}_m = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ sowie der durch

$$(\mathbf{T}_m)_{ij} := \begin{cases} h_{ij} & \text{für } j-1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegebenen Tridiagonalmatrix $\mathbf{T}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und die Matrizen \mathbf{V}_m und \mathbf{W}_m besitzen maximalen Rang.

Satz 2.33: (Buch – Satz 4.81)

Vorausgesetzt, der Bi-Lanczos-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{0}$ ab, und die in Satz 2.32 definierte Tridiagonalmatrix \mathbf{T}_m ist regulär, dann stellt

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m \mathbf{T}_m^{-1} (\|\mathbf{r}_0\|_2 \mathbf{e}_1) \in \mathbf{x}_0 + K_m$$

mit $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$ die eindeutig bestimmte Lösung der auf der Petrov-Galerkin-Bedingung

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_m \perp K_m^T$$

basierenden Krylov-Unterraum-Methode dar.

BiCG-Verfahren (Buch – Seite 168)

BiCG-Algorithmus —

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^* = \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^* := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$$

$$j := 0$$

Solange $\|\mathbf{r}_j\|_2 > \varepsilon$

$$\alpha_j := \frac{(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j^*)_2}{(\mathbf{A} \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j^*)_2}$$

$$\mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{r}_{j+1} := \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A} \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{r}_{j+1}^* := \mathbf{r}_j^* - \alpha_j \mathbf{A}^T \mathbf{p}_j^*$$

$$\beta_j := \frac{(\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_{j+1}^*)_2}{(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j^*)_2}$$

$$\mathbf{p}_{j+1} := \mathbf{r}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j$$

$$\mathbf{p}_{j+1}^* := \mathbf{r}_{j+1}^* + \beta_j \mathbf{p}_j^*$$

$$j := j + 1$$

Lemma 2.34: (Buch – Lemma 4.82)

Vorausgesetzt, der BiCG-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von \mathbf{p}_m^* ab, dann gilt für $j = 0, \dots, m$

$$\mathbf{r}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \gamma_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{r}_j^* = \sum_{i=1}^{j+1} \gamma_i^* \mathbf{w}_i,$$

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{p}_j^* = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i^* \mathbf{w}_i$$

mit $\gamma_{j+1}, \gamma_{j+1}^*, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+1}^* \neq 0$ und den aus dem Bi-Lanczos-Algorithmus resultierenden bi-orthonormalen Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j+1}$ und $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{j+1}$.

Lemma 2.35: (Buch – Lemma 4.83)

Vorausgesetzt, der BiCG-Algorithmus bricht nicht vor der Berechnung von \mathbf{p}_{m+1}^* ab, dann gilt

$$(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i^*)_2 = 0 \quad \text{für } i \neq j \leq m + 1,$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i^*)_2 = 0 \quad \text{für } i \neq j \leq m + 1.$$

Satz 2.36: (Buch – Satz 4.84)

Unter der Voraussetzung, daß der BiCG-Algorithmus nicht vor der Berechnung von \mathbf{r}_m^* abbricht, stellt \mathbf{x}_m die Lösung des Problems

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \perp K_m^T$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + K_m$ dar.

CGS-Verfahren (Buch – Seite 174)

CGS-Algorithmus —

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad j := 0$$

Solange $\|\mathbf{r}_j\|_2 > \varepsilon$

$$\mathbf{v}_j := \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \quad \alpha_j := \frac{(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0)_2}{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_0)_2}$$

$$\mathbf{q}_j := \mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{x}_j + \alpha_j (\mathbf{u}_j + \mathbf{q}_j)$$

$$\mathbf{r}_{j+1} := \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}(\mathbf{u}_j + \mathbf{q}_j)$$

$$\beta_j := \frac{(\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_0)_2}{(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0)_2}$$

$$\mathbf{u}_{j+1} := \mathbf{r}_{j+1} + \beta_j \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{p}_{j+1} := \mathbf{u}_{j+1} + \beta_j (\mathbf{q}_j + \beta_j \mathbf{p}_j), \quad j := j + 1$$

BiCGSTAB-Verfahren (Buch – Seite 178)

BiCGSTAB-Algorithmus —

Wähle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$\mathbf{r}_0 := \mathbf{p}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$, $\rho_0 := (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)_2$, $j := 0$

Solange $\|\mathbf{r}_j\|_2 > \varepsilon$

$$\mathbf{v}_j := \mathbf{A} \mathbf{p}_j, \alpha_j := \frac{\rho_j}{(\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_0)_2}$$

$$\mathbf{s}_j := \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{v}_j, \mathbf{t}_j := \mathbf{A} \mathbf{s}_j$$

$$\omega_j := \frac{(\mathbf{t}_j, \mathbf{s}_j)_2}{(\mathbf{t}_j, \mathbf{t}_j)_2}$$

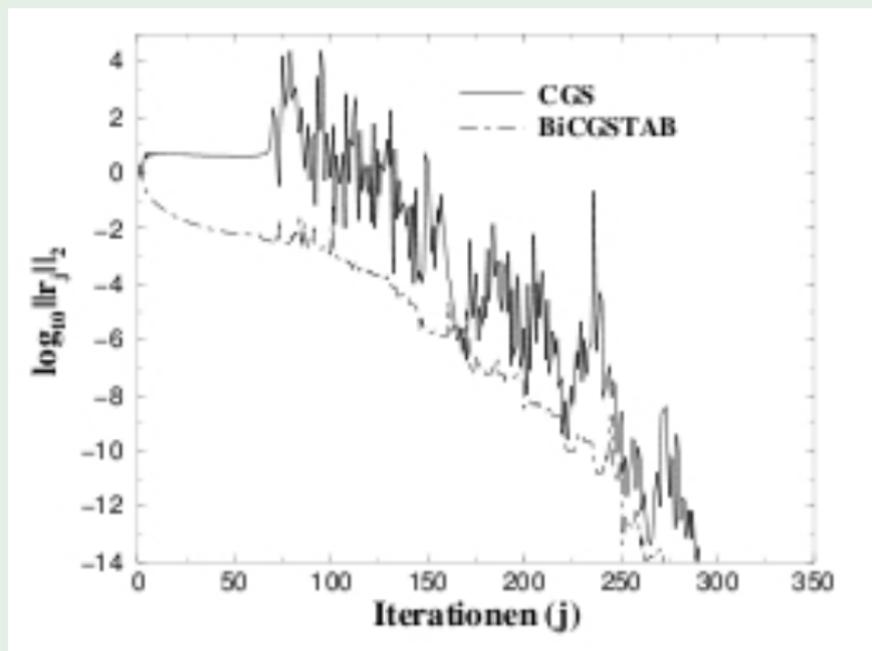
$$\mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j + \omega_j \mathbf{s}_j$$

$$\mathbf{r}_{j+1} := \mathbf{s}_j - \omega_j \mathbf{t}_j$$

$$\rho_{j+1} := (\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_0)_2, \beta_j := \frac{\alpha_j \rho_{j+1}}{\omega_j \rho_j}$$

$$\mathbf{p}_{j+1} := \mathbf{r}_{j+1} + \beta_j (\mathbf{p}_j - \omega_j \mathbf{v}_j), j := j + 1$$

Konvergenzverläufe (Buch – Seite 193)



Definition 3.2: (Buch – Definition 5.9)

Sei durch $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_j + \mathbf{N}\mathbf{b}$ eine Splitting-Methode zur Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit einer regulären Matrix \mathbf{N} gegeben, dann heißt $\mathbf{P} = \mathbf{N}$ der zur Splitting-Methode assoziierte Präkonditionierer.

Splitting-Methode	Assoziierter Präkonditionierer
Jacobi-Verfahren	$\mathbf{P}_{Jac} = \mathbf{D}^{-1}$
Gauß-Seidel-Verf.	$\mathbf{P}_{GS} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$
SOR-Verfahren	$\mathbf{P}_{GS}(\omega) = \omega (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}$
Symm. G.-S.-Verf.	$\mathbf{P}_{SGS} = (\mathbf{D} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$
SSOR-Verfahren	$\mathbf{P}_{SGS}(\omega) = \omega(2 - \omega) (\mathbf{D} + \omega\mathbf{R})^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1}$

Definition 3.3: (Buch – Definition 5.10)

Jede Menge

$$\mathcal{M} \subset \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

heißt Matrixmuster im Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$. Zu gegebenem Matrixmuster \mathcal{M} heißt

$$\mathcal{M}_S(j) := \{i \mid (i, j) \in \mathcal{M}\}$$

das zu \mathcal{M} gehörige j -te Spaltenmuster und

$$\mathcal{M}_Z(j) := \{i \mid (j, i) \in \mathcal{M}\}$$

das zu \mathcal{M} gehörige j -te Zeilenmuster. Zu gegebener Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnet

$$\mathcal{M}^{\mathbf{A}} := \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0\}$$

die Besetzungsstruktur von \mathbf{A} .

Definition 3.4: (Buch – Definition 5.11)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} + \mathbf{F} \quad (*)$$

existiere unter den Bedingungen

- 1 $u_{ij} = 1$ für $i = 1, \dots, n$,
- 2 $l_{ij} = u_{ij} = 0$, falls $(i, j) \notin \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$,
- 3 $(\mathbf{LU})_{ij} = a_{ij}$, falls $(i, j) \in \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$,

und es seien $\mathbf{L} = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ und $\mathbf{U} = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reguläre linke untere beziehungsweise rechte obere Dreiecksmatrix, dann heißt $(*)$ unvollständige LU-Zerlegung (incomplete LU, ILU) der Matrix \mathbf{A} zum Muster $\mathcal{M}^{\mathbf{A}}$.

Unvollständige LU-Zerlegung (Buch – Seite 210)

Für $i = 1, \dots, n$

Für $k = i, \dots, n, k \in \mathcal{M}_S^A(i)$

$$\ell_{ki} = a_{ki} - \sum_{m=1}^{i-1} \ell_{km} u_{mi}$$

$m \in \mathcal{M}_Z^A(k) \cap \mathcal{M}_S^A(i)$

Für $k = i + 1, \dots, n, k \in \mathcal{M}_Z^A(i)$

$$u_{ik} = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{m=1}^{i-1} \ell_{im} u_{mk} \right)$$

$m \in \mathcal{M}_Z^A(i) \cap \mathcal{M}_S^A(k)$

Definition 3.5: (Buch – Definition 5.12)

Es sei

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} + \mathbf{F}$$

eine unvollständige LU-Zerlegung der Matrix \mathbf{A} , dann ist

$$\mathbf{P} := \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

der zugehörige ILU-Präkonditionierer.

Definition 3.6: (Buch – Definition 5.13)

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Die Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T + \mathbf{F} \quad (*)$$

existiere unter den Bedingungen

- 1 $\ell_{ij} = 0$, falls $(i, j) \notin \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$,
- 2 $(\mathbf{L}\mathbf{L}^T)_{ij} = a_{ij}$, falls $(i, j) \in \mathcal{M}^{\mathbf{A}}$,

und es sei $\mathbf{L} = (\ell_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reguläre linke untere Dreiecksmatrix, dann heißt $(*)$ unvollständige Cholesky-Zerlegung (incomplete Cholesky, IC) der Matrix \mathbf{A} zum Muster $\mathcal{M}^{\mathbf{A}}$.

Unvollständige Cholesky-Zerlegung (Buch – Seite 212)

Für $k = 1, \dots, n$

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{kj}^2}$$

$j \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^A(k)$

Für $i = k + 1, \dots, n$, $i \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^A(k)$

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{ij} \ell_{kj} \right)$$

$j \in \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^A(i) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^A(k)$