Begleitfolien zur Vorlesung "Höhere Mathematik I"

Sigrun Ortleb

21.10.2016

Organisatorisches

Vorlesung: (Dr. Sigrun Ortleb)	Mi 8:15-9:45 Fr 12:15-13:45	Diagonale 1, Hörsaal I
Hörsaalanleitung : (Prof. Dr. Bernd Billhardt)	Mo 12:00-13:30	Diagonale 1, Hörsaal I

Übungen:	verschiedene Gruppen Selbsteinschreibung in Moodle-Kurs (Infos, Ü-Blätter) Passwort `ingmath` Ü-Gruppen freigeschaltet ab heute 18:00 bis 4.11.16 18:00
Lernzentrum:	Mo-Fr 16-18 geöffnet Untere Köngigsstr. 86, Raum 2004

Aktuelle Informationen (diese Folien) unter

http://www.mathematik.uni-kassel.de/∼ortleb

Ab nächster Woche alles im Moodle-Kurs

Studienleistungen

Erforderlich neben der Prüfungsleistung (Klausur)

Ohne bestandene Studienleistungen keine Credits!

- Eingangstest des FB 15
- Lösen der Pflichtaufgaben der Übungsblätter

Die Übungsblätter enthalten insgesamt 12 Pflichtaufgaben.

Zu erreichende Punktzahl:

Bei mindestens 10 der 12 Pflichtaufgaben jeweils mindestens 50% der möglichen Punkte

Anmeldung

Für die Studienleistung müssen Sie sich zusätzlich in HIS-POS anmelden.

Wenn Sie Fragen haben

- In der Vorlesung grundsätzlich erlaubt, sogar erwünscht!
- Erfahrungsgemäß wird oft direkt nach der Vorlesung gefragt
- Sie sind herzlich in meine Sprechstunde eingeladen
- Fragen oder Terminvereinbarung per Email möglich
- Büro am Standort AVZ, Heinrich Plett Str. 40: Raum 2416
  $\rightarrow$ Bitte Termin vereinbaren

Kontaktdaten

ortleb@mathematik.uni-kassel.de
Sprechstunde: Mi 10-12, Untere Königsstraße 86, 2.Stock

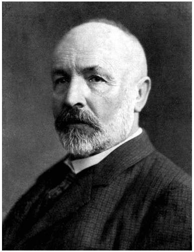
Inhalte der Vorlesung

1. Mengen, Rechnen mit reellen Zahlen
2. Analytische Geometrie [Vektorrechnung, Geraden, Ebenen]
3. Folgen und Reihen [u. a. Konvergenz und Grenzwert, Konvergenzkriterien]
4. Reelle Funktionen [u. a. Stetigkeit, elementare Funktionen]
5. Differentialrechnung [u. a. Ableitungen, Kurvendiskussion]
6. Integralrechnung
7. Potenzreihen [insbes. Taylor-Reihen]

Nutzen: kompakte und präzise Begrifflichkeiten, Kurzschreibweisen

Definition (Mengenbegriff nach Cantor)

Eine Menge ist ein Zusammenschluß von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.



Georg Cantor
1845-1918

Definition

1. Sei M eine Menge und x ein Objekt.
   Ist das das Objekt x in dem Zusammenschluß M enthalten, schreiben wir $x \in M$ (“x ist ein Element von M”)
   Ist das das Objekt x nicht in M enthalten, schreiben wir $x \notin M$
2. Zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn sie die selben Elemente haben.

Mengendefinitionen

1. Durch Auflistung ihrer Elemente

$$M := \{x_1, \cdots, x_n\}$$

   M besteht aus genau den Objekten $x_1, \cdots, x_n$.

2. Durch Aussondern: Sei $A(x)$ eine Aussage, die für alle Objekte x einen Sinn hat.

$$M := \{x | A(x)\}$$

   M besteht aus genau denjenigen Objekten, für welche die Aussage $A(x)$ wahr ist.

3. Sei W eine Menge.

$$M := \{x \in W | A(x)\}$$

   M besteht aus genau denjenigen Objekten, die in W enthalten sind und für die die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, kartesisches Produkt

Definition

Seien A und B Mengen.

- $A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$ Menge, die genau aus den Objekten besteht, die sowohl in A als auch in B liegen.
- $A \cup B := \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Menge, die genau aus den Objekten besteht, die entweder in A oder in B liegen.
- $A \setminus B := \{x \in A | x \notin B\}$ Menge, die genau aus den Objekten besteht, die in A aber nicht in B liegen.
- $A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$ Menge aller geordneten Paare (a, b) wobei a ein Element aus A und b ein Element aus B ist.

Beispiel

Seien $A = \{1, 2, 5\}, B = \{5, 7\}$.
Was sind $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$?
Achtung: $\{1, 7\} = \{7, 1\}$ aber $(1, 7) \neq (7, 1)$

Einige wichtige Mengen

Definition

Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die **leere Menge**, die überhaupt kein Objekt enthält. Es gilt $x \notin \emptyset$ für jedes denkbare Objekt x.

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} := \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} := \{x | \text{Es gibt } a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{a}{b}\}$ Menge aller Brüche bzw. Menge aller rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ Menge aller reellen Zahlen
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ zweidimensionaler euklidischer Raum
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ dreidimensionaler euklidischer Raum
- $\mathbb{C}$ Menge aller komplexen Zahlen

Mengenrelationen

Definition und Bemerkung

Seien A und B Mengen.

- Man nennt B eine **Teilmenge** von A und schreibt $B \subset A$, wenn jedes Element von B auch Element von A ist.
- Man schreibt $B \not\subset A$, wenn B nicht Teilmenge von A ist.
- Man nennt B eine **echte Teilmenge** von A und schreibt $B \subsetneq A$, wenn $B \subset A$ gilt und (mindestens) ein Element $x \in A$ mit $x \notin B$ existiert
- Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt.
- Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel

- Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.
- Es gilt $\{1, 2, \sqrt{2}\} \subsetneq \mathbb{R}$.
- Es gilt $\{1, 2, \sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{Z}$ (weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$).

Intervalle

Seien $a \le b$ reelle Zahlen.

Definition (Intervalle)

1. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$.
2. $[a, b[:= [a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$.
3. $]a, b] := (a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$.
4. $]a, b[:= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.
5. $\mathbb{R}^{\ge a} := [a, \infty[:= [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$.
6. $\mathbb{R}^{> a} :=]a, \infty[:= (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.
7. $\mathbb{R}^{\le a} :=]-\infty, a] := (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$.
8. $\mathbb{R}^{< a} :=]-\infty, a[:= (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.
9. $]-\infty, \infty[:= (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Die Mengen in 5-8 werden auch als Halbstrahlen bezeichnet.

Ferner setzt man $\mathbb{R}^{\neq a} := \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dies ist eine punktierte Gerade.

I.2. Das Rechnen mit reellen Zahlen

- Potenzen und Wurzeln
- Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion
- Fakultät und Binomialkoeffizient
- Summenzeichen und Produktzeichen
- Summationsformeln

Definition

Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}.$$

Falls $a \neq 0$, so setzt man

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Sonderregel: $a^0 := 1$

Potenzen und Wurzeln

Definition

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann hat die Gleichung

$$X^n = a$$

genau eine nicht-negative Lösung; diese wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Definition

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gegeben. Man setzt

$$a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m.$$

Dadurch ist nun a^q für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ definiert.
Z.B. legt Obiges fest, was $3^{-\frac{4}{7}}$ oder $\pi^{0.7}$ ist.
Ihr Taschenrechner kann diese Ausdrücke (näherungsweise) berechnen.

Satz (Rechenregeln)

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$.

1. $(ab)^r = a^r b^r$.
2. $a^{r+s} = a^r a^s$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. Wenn $0 < a < b$ und $r > 0$, dann $a^r < b^r$.
   Wenn $0 < a < b$ und $r < 0$, dann $a^r > b^r$.

Beispiel (Termumformung mit obigen Rechenregeln)

Sei $x > 0$ und $y > 0$. Der Ausdruck

$$A = \frac{\sqrt[3]{x^9 y^5}}{(x^8 y^6)^{0.25}}$$

soll vereinfacht werden.

Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion

Definition und Bemerkung

Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den **Betrag von** x

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und **das Signum von** x

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Offenbar gilt $x = \operatorname{sign}(x)|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel

$|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|-11| = 11$, $|0| = 0$.
$\operatorname{sign}(12) = +1$, $\operatorname{sign}(-13) = -1$, $\operatorname{sign}(0) = 0$, $\operatorname{sign}(2) = +1$.

Absolutbetrag und Vorzeichenfunktion

Geometrische Interpretation

1. $|x|$ ist der Abstand von x zu 0 am Zahlstrahl.
2. $|x-y|$ ist der Abstand von x zu y am Zahlstrahl.

Satz (Rechenregeln für Beträge)

1. $|xy| = |x||y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $|x^r| = |x|^r$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{Z}$.
4. Dreiecksungleichung: $|x+y| \leq |x| + |y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
5. Inverse Dreiecksungleichung: $|x-y| \geq ||x| - |y||$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition (Fakultät)

Man definiert für $n \in \mathbb{N}$ die **Fakultät von** n als

$$n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Sonderregel: $0! := 1$.

Beispiel

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$15! = 1307674368000$.
(Fakultäten werden schnell sehr groß!)

Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition (Binomialkoeffizient)

Man definiert für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ den **Binomialkoeffizient "n über k"** als

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mögliche Interpretation

1. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, in einer Liste von n Zahlen genau k Zahlen auszuwählen / anzukreuzen.
2. Zum Beispiel ist $\binom{49}{6}$ die Anzahl an Möglichkeiten, einen Lottoschein beim Spiel "6 aus 49" auszufüllen.

Fakultät und Binomialkoeffizient

Beispiel

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10.$
$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13983816.$
$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1.$
$\binom{3}{5} = 0.$

Satz (Rechenregeln)

Sei $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $0 \leq k \leq n$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}.$

Summenzeichen und Produktzeichen

Definition (Summenzeichen und Produktzeichen)

Sei $m \le n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Seien $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$ reelle Zahlen. Man setzt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n.$$

Sonderregel: $\sum\limits_{k=m}^{m-1} a_k := 0$ und $\prod\limits_{k=m}^{m-1} a_k = 1$.

Beispiel

$\sum_{k=-2}^{3} k^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 19$

Beispiel

- $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{4}(3k-2) &= (3\cdot 2-2)+(3\cdot 3-2)+(3\cdot 4-2)= \\ &= 4+7+10=21\end{aligned}$$
- $\prod_{\ell=1}^{4}\ell^2 = 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2 = 576$
- $\prod_{k=1}^{n} k = n!$ für $n\in\mathbb{N}$.

Summationsformeln

Was ist $S := 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$?
Offenbar gilt $S = \sum_{k=1}^{100} k$.

Carl Friedrich Gauß
1777-1855

Summationsformel von Gauß

$$S = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$$

Summationsformeln

Es gibt Summationsformeln, mit deren Hilfe man in einfach gelagerten Fällen ein Summationszeichen durch Termumformung eliminieren kann.

Satz (Summationsformel von Gauß)

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{2} N(N+1)$$

Satz (Geometrische Summationsformel)

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad (\text{für } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, N \in \mathbb{N})$$

Beispiel

Was ist $\sum_{k=0}^{10} 2^k$? Mit der geometrischen Summationsformel berechnet man mühelos:

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2048}{-1} = 2047.$$

Manchmal muß man geschickte Termumformungen machen, bevor eine der Summationsformeln greift.

Beispiel (*)

Was ist $\sum_{k=5}^{10} 2^k$? Obige geo. Summationsformel greift nicht direkt, da die untere Grenze 5 und nicht 0 ist. Man kann hier aber z.B. so vorgehen:

$$\sum_{k=5}^{10} 2^k = \sum_{k=0}^{10} 2^k - \sum_{k=0}^{4} 2^k = \frac{1-2^{11}}{1-2} - \frac{1-2^5}{1-2} = 2016.$$

Wir haben im ersten Schritt die Zerlegungs-Formel und im 2. Schritt (2 mal) die geometrische Summenformel benutzt.

Beispiel (*) - alternativer Weg

Was ist $\sum_{k=5}^{10} 2^k$? Man könnte auch so rechnen:

$$\sum_{k=5}^{10} 2^k = \sum_{k=0}^{5} 2^{k+5} = \sum_{k=0}^{5} 2^5 \cdot 2^k = 2^5 \sum_{k=0}^{5} 2^k = 36\,\frac{2^6 - 1}{-1} = 2016.$$

Hier haben wir im 1. Schritt die Indexshiftformel, im 2. Schritt die Distributivität und im 3. Schritt die geometrische Summenformel benutzt.

Binomischer Lehrsatz

Jeder kennt die **binomische Formel**

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Naheliegende Frage: Was ist $(x+y)^3$, $(x+y)^4$, $(x+y)^5$ usw.? Gibt es eine analoge Formel dafür?

Satz (Binomischer Lehrsatz)

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Z.B. für $n = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= \tbinom{3}{0} x^{3-0} y^0 + \tbinom{3}{1} x^{3-1} y^1 + \tbinom{3}{2} x^{3-2} y^2 + \tbinom{3}{3} x^{3-3} y^3 = \\ &= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3. \end{aligned}$$

Binomischer Lehrsatz

Jeder kennt die **2. binomische Formel**

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Naheliegende Frage: Was ist $(x-y)^n$ für $n = 2, 3, 4, \cdots$? Gibt es eine analoge Formel dafür?

Substituiert man im binomischen Lehrsatz $(-y)$ für y, so erhält man folgende Antwort auf obige Frage:

Folgerung (Analogon zur 2. binomischen Formel)

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n-k} y^k.$$

Z.B. für $n = 3$ ergibt sich $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$

Binomischer Lehrsatz

Jeder kennt die **3. binomische Formel**

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Es läßt sich folgende entsprechende Formel für $x^n - y^n$ zeigen:

Satz (Analogon zur 3. binomischen Formel)

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$$

z.B. für $n = 3$ ergibt sich: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.