Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Andreas Meister
Dipl.-Math. Sigrun Ortleb

WiSe 2008/2009

Numerik I

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *streng diagonaldominant*, wenn

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt.

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ streng diagonaldominant.

i) Zeigen Sie: $a_{11} \neq 0$.

ii) Sei

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

die durch den ersten Gauß-Schritt entstehende Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}_1\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathbf{A}}$ ebenfalls strikt diagonaldominant ist, und zwar sogar stärker als $\mathbf{A}$ im Sinne von

$$\tilde{Q}_i := \frac{1}{|\tilde{a}_{ii}|} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} |\tilde{a}_{ij}| \ \leq \ Q_i := \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n.$$

iii) Begründen Sie: Die Matrix $\mathbf{A}$ besitzt eine LR-Zerlegung.

(5 P)

Aufgabe 2

Klaus hat einen neuen Taschenrechner zu Weihnachten bekommen. Begeistert löst er sofort die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2 \cdot 10^{10} \cdot x + 1 = 0$$

mit der pq-Formel und erhält als Lösungen

$$x_1 = 2 \cdot 10^{10} \quad \text{und} \quad x_2 = 0.$$

i) Berechnen Sie per Hand mit Hilfe von

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 \quad \text{für kleine } |x|$$

Näherungen an die Nullstellen obiger Gleichung und schätzen Sie den Fehler dieser Näherungen ab.

ii) Taschenrechner und auch sonstige Computer können im allgemeinen Zahlen nur mit einer begrenzten Anzahl von Ziffern darstellen. Als Gleitkommazahlen werden sie dargestellt in der Form $a \cdot 10^e$, wobei $0 \leq a < 10$ eine feste Anzahl von Ziffern hat und der ganzzahlige Exponent e die Größenordnung festlegt. Nehmen wir an, dass der Taschenrechner von Klaus Gleitkommazahlen mit zehn Ziffern und zweistelligen Exponenten darstellt. Was ist bei der Berechnung mittels pq-Formel passiert?

iii) Was erhält Klaus bei der Berechnung von $x_2 = \frac{-2q}{p+\sqrt{p^2-4q}}$ mit seinem Taschenrechner?

(5 P)

Abgabe: Bis Freitag, 16.1.2009, 9:30 Uhr
Das NumerikI-Team wünscht Fröhliche Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr.