

Numerik I

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie:

- i) Es existiert genau eine Zerlegung der Form $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{L}}^T$ mit einer linken unteren Dreiecksmatrix $\tilde{\mathbf{L}}$, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind.
- ii) Es existiert genau eine Zerlegung der Form $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ mit einer linken unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} , deren Diagonalelemente alle positiv sind. (5 P)

Aufgabe 2

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe haben Sie Zeit bis zum **30.1.2009, 9:30 Uhr**.

Die 30%-Regelung betrifft die Gesamtpunktzahl der Übungsblätter 11 und 12.

- a) *Theoretischer Teil:* Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei \mathbf{D} die Diagonalmatrix mit den Einträgen $d_{ii} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}$. Zeigen Sie: $\text{cond}_{\infty}(\mathbf{D}\mathbf{A}) \leq \text{cond}_{\infty}(\mathbf{A})$, d.h. die Konditionszahl in der ∞ -Norm wird durch die Multiplikation mit \mathbf{D} (eine sogenannte *Zeilenäquilibrierung*) zumindest nicht verschlechtert. (2 P)

- b) *Praktischer Teil:*

- i) Schreiben Sie eine Funktion
`function [L,R] = NAME_LR(A)`,
die die LR-Zerlegung einer regulären Matrix \mathbf{A} ohne Spaltenvertauschung berechnet. (In diesem Fall werden also die Matrizen \mathbf{L} und \mathbf{R} mit $\mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{A}$ ausgegeben.)
- ii) Erweitern Sie Ihr Verfahren zu einer Routine
`function [P,L,R] = NAME_LR_mit_pivot(A)`,
die mit Spaltenpivotisierung arbeitet (wählen Sie das betragsmäßig größte der in Frage kommenden Elemente einer Spalte als Pivotelement). Ausgegeben werden die Matrizen $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{R}$ mit $\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$.
- iii) Testen Sie Ihre Verfahren aus a) und b) mittels der Testdatei `blatt11_test.m` auf der Übungshomepage. (Die Funktionsaufrufe müssen Sie noch anpassen.) Wie wirken sich Spaltenpivotisierung und Zeilenäquilibrierung zumindest bei diesen Beispielen aus? Abzugeben sind Ihre diesbezüglichen Beobachtungen sowie die gut kommentierten Routinen (per E-Mail und als Ausdruck). (8 P)

Abgabe: Bis Freitag, 23.1.2009, 9:30 Uhr