

Numerik I

Aufgabenblatt 14

Aufgabe 1

Den Daten

$$\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), (1, 2), (2, 23)$$

werde das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$ zugeordnet. Bestimmen Sie mit Hilfe des Neville-Algorithmus die Werte $p(-1)$ und $p(0)$ von Hand.

Lösung: $p(-1) = -10$, $p(0) = -1$.

Aufgabe 2

a) Von der Funktion $f(x) = \ln x$ seien nur die Näherungswerte

x_i	0.5	1	2
$\ln x_i$	-0.693	0	0.693

bekannt. Stellen sie dazu das Interpolationspolynom p niedrigsten Grades in der Newtonschen Darstellung auf.

Lösung: $p(x) = -0.693 + 1.386(x - 0.5) - 0.462(x - 0.5)(x - 1)$.

b) Berechnen Sie $p(1.5)$ als Näherungswert für $\ln 1.5$. Wie groß ist der Betrag des Fehlers höchstens und wie groß mindestens?

Lösung: $p(1.5) = 0.462$; $\frac{1}{12 \cdot 2^3} \leq |f(1.5) - p(1.5)| \leq \frac{2^3}{12}$.

Aufgabe 3

Diese Aufgabe dient nicht der Klausurvorbereitung. Im nächsten Semester wird unter anderem näherungsweise Integration behandelt, dies ist also eine kleine Vorschau.

Entwickeln Sie eine Formel

$$\int_0^1 f(x) dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

mit $x_0 = 0$ zur näherungsweisen Integration von Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mit der Polynome vom Grad 2 exakt integriert werden. D.h. es müssen $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \in [0, 1]$ bestimmt werden, so dass für alle Polynome $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2 gilt:

$$\int_0^1 p(x) dx = w_0 p(0) + w_1 p(x_1).$$

Lösung: $w_1 = 3/4, w_0 = 1/4, x_1 = 2/3$.

Abgabe: Es ist keine Korrektur für dieses Blatt vorgesehen.