Lösen von Differentialgleichungen durch Reihenentwicklung

Thomas Wassong

FB17 Mathematik
Universität Kassel

30. April 2008

Einführung

Reihen in der Mathematik

Reihen zum Lösen von Differentialgleichungen

einfache DGL

Betrachten wir einmal die DGL

$$y'(x) = y(x) - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 2, \; y(0) = 0.$$

Nach MuPAD lautet die Lösung

$$y(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x.$$

Was ist das besondere an dieser Lösung?

Polynome

Polynome lassen sich sehr einfach und schnell Differenzieren und Integrieren.
Funktionswerte von Polynomen lassen sich ebenfalls einfach ausrechnen.

Diese Eigenschaften wollen wir im Folgenden nutzen.
Dazu aber vorher noch weitere Vorüberlegungen.

Vorüberlegungen zu Reihen

Wann sind zwei Funktionen an einer Stelle gleich?

Vorüberlegungen zu Reihen

Wann sind zwei Funktionen an einer Stelle gleich?

- Wenn die Funktionswerte gleich sind.
- Wenn die Steigungen gleich sind.
- Wenn die Krümmungen gleich sind.
- ...

Also müssen an der Stelle alle Ableitungen gleich sein.

Vorüberlegungen zu Reihen

Wann sind zwei Funktionen an einer Stelle gleich?

Idee: Man könnte alle Funktionen durch Polynome darstellen, die an einer Stelle die gleichen Funktionswerte und die gleichen Ableitungen haben.

Taylorreihen

(Fast) jede unendlich-oft differenzierbare Funktion $f(x)$ lässt sich durch eine Potenzreihe darstellen.
Eine Potenzreihe ist ein unendliches Polynom der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Wenn für die Koeffizienten $b_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ gilt, so ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

Beispiel in MuPAD

Entwicklung der Funktion sin(x)

Aufgaben

Eine der wichtigsten Funktionen, die sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt, ist die Exponentialfunktion.

1. Berechne die ersten 7 Glieder der Potenzreihe für $exp(x)$.
2. Plotte die entstandenen Polynome mit $2, 5$ und 7 Glieder zusammen mit der Exponentialfunktion und vergleiche die Ergebnisse. Wie ändert sich die Näherung an die Exponentialfunktion?
3. Betrachtet einmal den Plot an der Stelle $x = 5$. Was fällt auf?

Potenzreihe um einen Entwicklungspunkt

(Fast) jede unendlich-oft differenzierbare Funktion $f(x)$ lässt sich an einer Stelle a durch eine Potenzreihe darstellen. a nennt man den Entwicklungspunkt der Potenzreihe.
Die Potenzreihe hat die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

mit den Koeffizienten $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Der `taylor`-Befehl

MuPAD kann solche Potenzreihen mit Hilfe des `taylor`-Befehls berechnen. Die Argumente sind zuerst die zu entwickelnde Funktion, dann den Entwicklungspunkt. Optional kann man als drittes die Anzahl der zu berechnenden Glieder angeben.
Bsp in MuPAD!

Aufgaben

1. Entwickle die ersten acht Glieder der Potenzreihe für die Funktion $f(x) = sin(x * cos(x))$ an der Stelle $x = \pi$.
2. Plotte die erzeugten Funktionen.

Was hat die Potenzreihe mit der Lösung von DGLen zu tun?

-
-
-

Was hat die Potenzreihe mit der Lösung von DGLen zu tun?

- (Fast) Alle Funktionen, die nicht Polynome sind, können durch Polynome ersetzt werden. Damit hat man nur noch Potenzen von x zu betrachten. Je nach gewünschter Genauigkeit wird dann die Anzahl der Glieder gewählt.
-
-

Was hat die Potenzreihe mit der Lösung von DGLen zu tun?

- (Fast) Alle Funktionen, die nicht Polynome sind, können durch Polynome ersetzt werden. Damit hat man nur noch Potenzen von x zu betrachten. Je nach gewünschter Genauigkeit wird dann die Anzahl der Glieder gewählt.
- Die möglichen Lösungen werden als Potenzreihen betrachtet und für die y-Funktionen entsprechend eingesetzt. Dann gilt es nur noch die Koeffizienten zu bestimmen. Auch hier wählt man die Anzahl der Glieder nach gewünchter Genauigkeit. Sie sollte jedoch mit der Genauigkeit im ersten Punkt übereinstimmen.
-

Was hat die Potenzreihe mit der Lösung von DGLen zu tun?

- (Fast) Alle Funktionen, die nicht Polynome sind, können durch Polynome ersetzt werden. Damit hat man nur noch Potenzen von x zu betrachten. Je nach gewünschter Genauigkeit wird dann die Anzahl der Glieder gewählt.
- Die möglichen Lösungen werden als Potenzreihen betrachtet und für die y-Funktionen entsprechend eingesetzt. Dann gilt es nur noch die Koeffizienten zu bestimmen. Auch hier wählt man die Anzahl der Glieder nach gewünchter Genauigkeit. Sie sollte jedoch mit der Genauigkeit im ersten Punkt übereinstimmen.
- Man sollte jedoch den Entwicklungspunkt der Reihendarstellung - sowohl bei Funktionen der DGL als auch beim Ansatz für die y(x)-Funktion - bei t_0 wählen, um die Genauigkeit zu optimieren.

Ein Beispiel

Gegeben sei die DGL

$$y'(x) = y(x) + x * \exp(x),\ \ y(0) = 0.$$

Siehe MuPAD!

Aufgaben

Löse die DGL

$$y'(x) = y(x) + cos(x) * sin(x),\ y(0) = 1$$

und plotte das Ergebnis. Wählen Sie dabei für das Richtungsfeld die Optionen `x=-1..1,y=-1..1` und für `plot::Function2d` die Optionen `x=-1..1,ViewingBoxYRange=-1..1`.