

Übungen zur Algebra I — Blatt 11, Wintersemester 04/05

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)

e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabetermin: Dienstags

41. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K . Zeigen Sie:

- (a) Die Automorphismen der K -Algebra $K[x]$ sind genau die Abbildungen

$$\tau : K[x] \rightarrow K[x], f \mapsto \tau(f) := f(ax + b) \in K[x]$$

mit geeigneten $a \in K^\times$ und $b \in K$.

- (b) Es sei $f \in K[x]$. Zeigen Sie, daß f genau dann irreduzibel ist, wenn für alle $a \in K^\times$, $b \in K$ das Polynom $f(ax + b)$ irreduzibel ist.

42. Aufgabe: (8 Punkte) Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen, K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{F}_q$ und $a \in K$. Weiter sei d der Grad von $\mathbb{F}_q(a)$ über $\mathbb{F}_q$. Zeigen sie:

- (a) Der Grad d ist die kleinste positive ganze Zahl n mit $a^{q^n} = a$.

- (b) Das Minimalpolynom von a über $\mathbb{F}$ ist $\prod_{i=0}^{d-1} (x - a^{q^i})$.

- (c) Die Normabbildung $N : K^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ ist surjektiv.

Hierbei ist die Norm von $a \in K^\times$ gegeben durch die Determinante des $\mathbb{F}_q$ -linearen Operators

$$\tau_a : K \rightarrow K, b \mapsto ab,$$

wobei K als endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_q$ aufgefasst wird.

43. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei p eine Primzahl, n eine positive natürliche Zahl und $q = p^n$. Wieviele irreduzible und normierte Polynome vom Grad p^n über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ gibt es?