

8. Übungsblatt (23.01.2008)

1. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n \in \mathbb{N}$.
 - a) Zeigen Sie: Wenn $\deg(v) \geq (n-1)/2$ für alle $v \in V$, dann ist G zusammenhängend.
 - b) Zeigen Sie: Wenn $\deg(v) \geq n/2$ für alle $v \in V$, dann ist G hamiltonsch.
2. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, dreiecksfreier, plättbarer Graph mit $|V| = n \geq 3$. Zeigen Sie, daß dann $|E| \leq 2n - 4$ gilt.
3. a) Für welche Werte $n_1, n_2 \geq 1$ ist der vollständige bipartite Graph K_{n_1, n_2} plättbar?
b) Für welche Werte $n \geq 1$ ist der n -dimensionale Hyperwürfel H^n plättbar?
4. Es sei G der Teilergraph von 30, d.h. es sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ sowie $E = \{\{a, b\} : a, b \in V, a \neq b, \min(a, b) \mid \max(a, b)\}$, d.h. zwei verschiedene Zahlen aus V sind genau dann in G durch eine Kante verbunden, wenn die kleinere ein Teiler der größeren ist.
 - a) Geben Sie die Kantenmenge E explizit an (d.h. zählen Sie E auf).
Wieviele Kanten hat G ?
 - b) Welche Grade haben die acht Knoten von G jeweils?
 - c) Ist G zusammenhängend?
 - d) Zeichnen Sie G mit möglichst wenig Kantenüberschneidungen.
 - e) Ist G plättbar?
 - f) Ist G eulersch?
 - g) Ist G hamiltonsch?
5. Für einen Graphen $G = (V, E)$ definiert man den zugehörigen komplementären Graphen $\overline{G} = (V, \overline{E})$ durch die Beziehung $\overline{E} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\} \setminus E$, d.h. zwei verschiedene Knoten sind genau dann in \overline{G} benachbart, wenn sie es in G nicht sind.
 - a) Zeigen Sie: Wenn G nicht zusammenhängend ist, so ist \overline{G} zusammenhängend.
 - b) Der Graph G heißt selbstkomplementär, wenn G und \overline{G} isomorph sind. Zeigen Sie: Wenn $G = (V, E)$ selbstkomplementär ist, so ist G zusammenhängend und es gilt $|V| \equiv 0 \pmod{4}$ oder $|V| \equiv 1 \pmod{4}$.
 - c) Gibt es selbstkomplementäre Graphen mit 4 Knoten? Und solche mit 5 Knoten?

Die Übungsblätter gibt es auch online via

<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~compmath/lehre/ds2/ds2.html>