



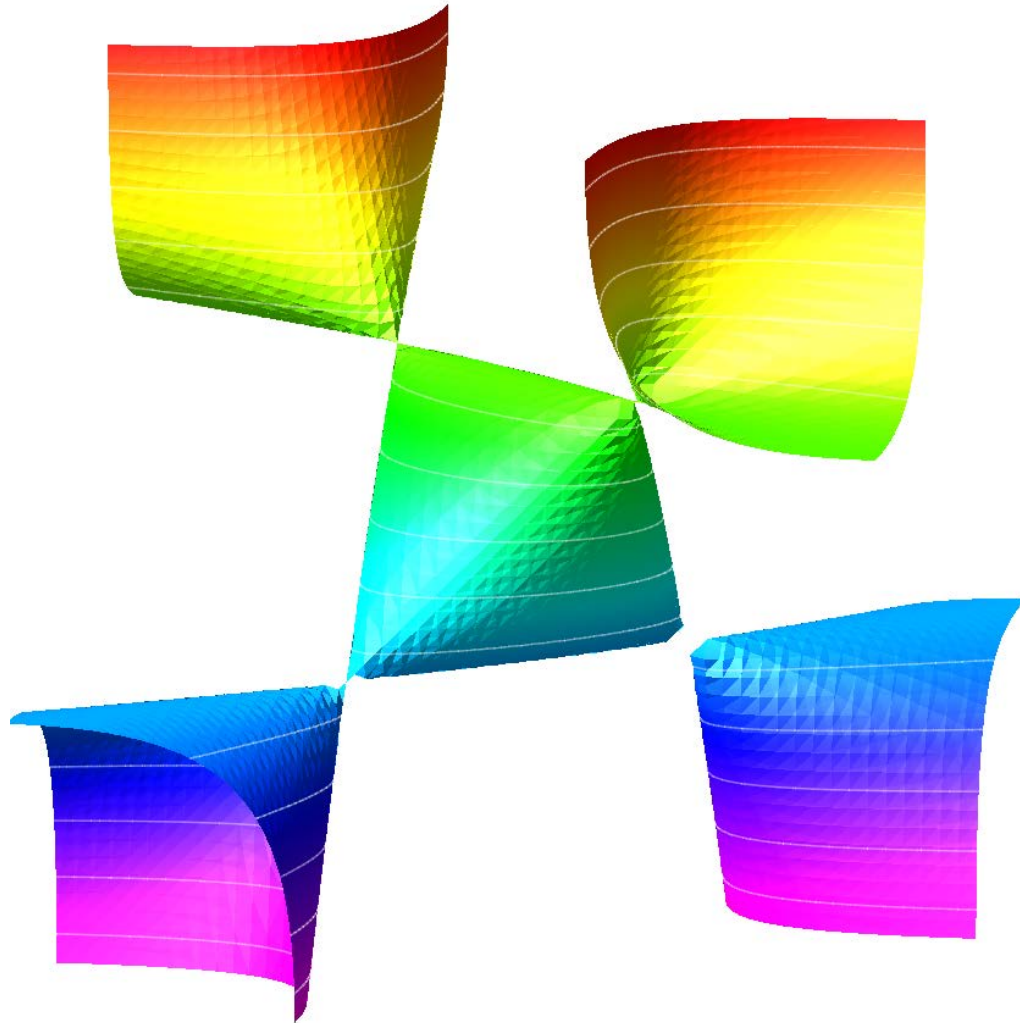
Algebra und Differentialgleichungen

Werner M. Seiler

Algorithmische Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

- Lineare Algebra: Analyse *linearer* Gleichungssysteme
- Kommutative Algebra: Analyse *polynomialer* Systeme
- Algebraische Geometrie: Analyse der *Lösungsmengen* polynomialer Systeme

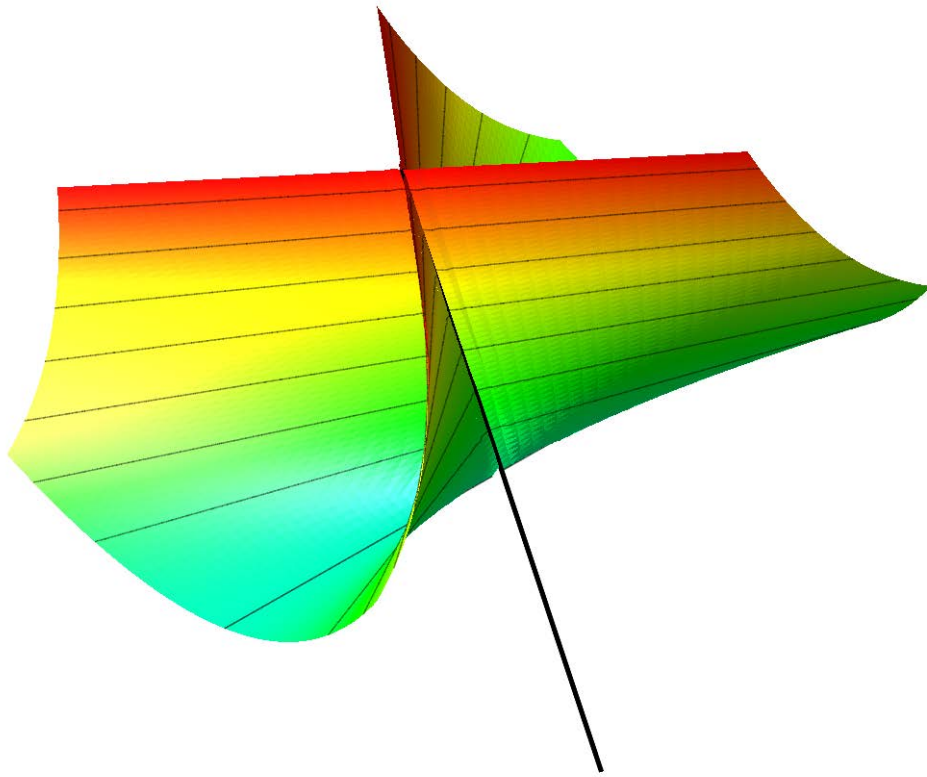
Algorithmische Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie



Kubische von Cayley

$$2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Algorithmische Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie



Regenschirm von Whitney

$$x^2 - y^2z = 0$$

Algorithmische Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Polynomiale Gleichungssysteme

- Nur in Ausnahmefällen *explizite* Lösung möglich
- Suche *qualitative* Informationen über Lösungsmenge
 - *Anzahl* der Lösungen (endlich/unendlich, reelle Lösungen)
 - Geometrische *Invarianten* (Dimension, #Komponenten)
 - „Besondere“ Lösungen (*Singularitäten*)
 - *Lokale* Form in Umgebung eines Punktes

Computeralgebra

Lässt sich ein Problem *algorithmisch* lösen?

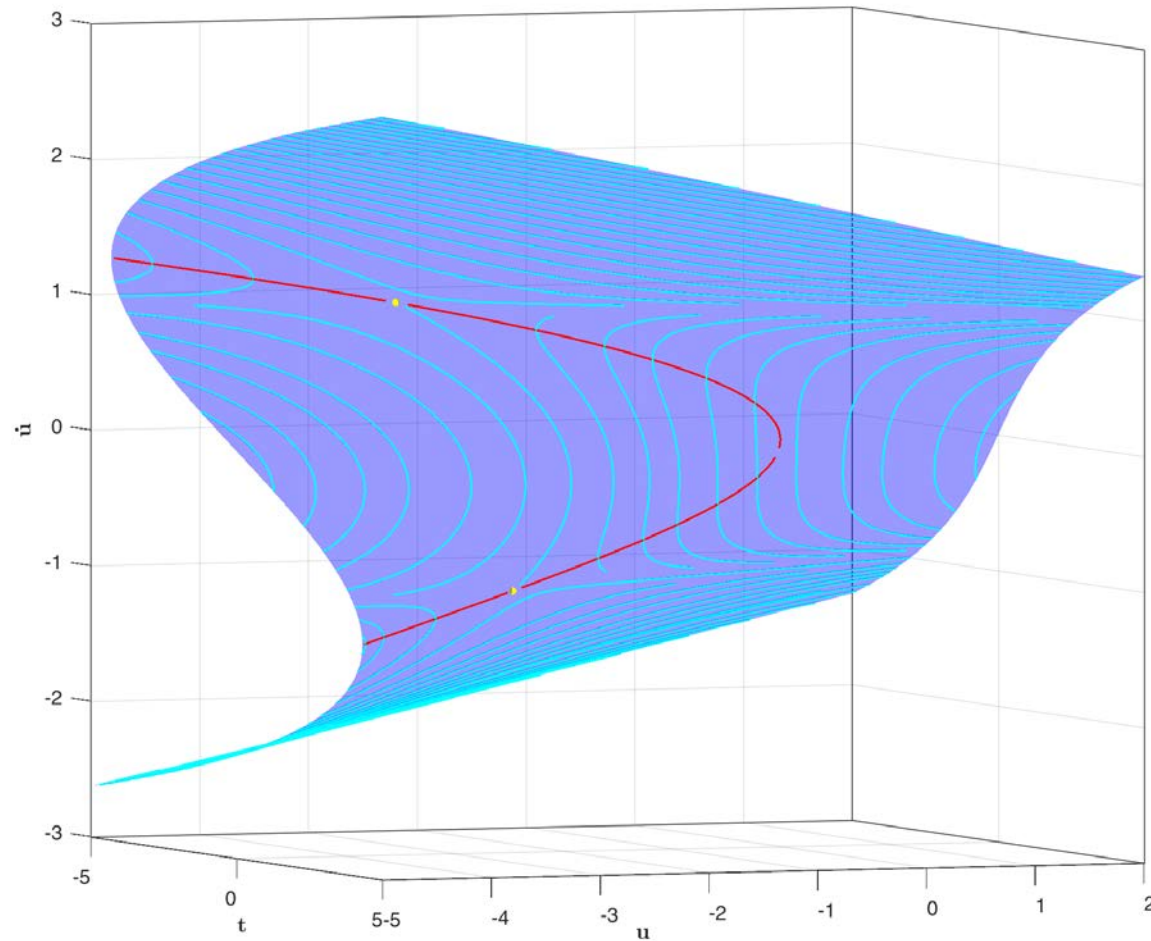
- **Theorie:** existiert ein **Algorithmus** für ein Problem?
 - Prinzipielle theoretische *Berechenbarkeit*
 - *Entwurf/Verbesserung* eines Algorithmus
 - *Komplexität* des Algorithmus
 - *Theoretische Grundlagen* von Algorithmen
- **Praxis:** **implementiere** Algorithmus
 - Implementierung in C++-*Bibliothek* CoCoALib
 - „*Proof-of-concept*“-Implementierungen
 - *Optimierung* zu Produktionscode
- **Kooperationen** u.a. mit Genua, Neapel, Turin und Logroño

Differentialalgebra

Analysiere **Differentialgleichungen** mit *algebraischen* und *geometrischen* Methoden

- **Theoretische Grundlagen**
 - *Differential*polynome, -ringe, -körper
 - *Differential*algebraische Geometrie
- **Anwendungen**
 - *Symmetrien* von Modellen aus Physik oder **Biologie**
 - Mechanische Systeme / Feldtheorien mit *Zwangsbedingungen*
 - Singularitäten *impliziter* Differentialgleichungen
- **Kooperationen** u.a. mit Lille, Montpellier und Vigo

Differentialalgebra

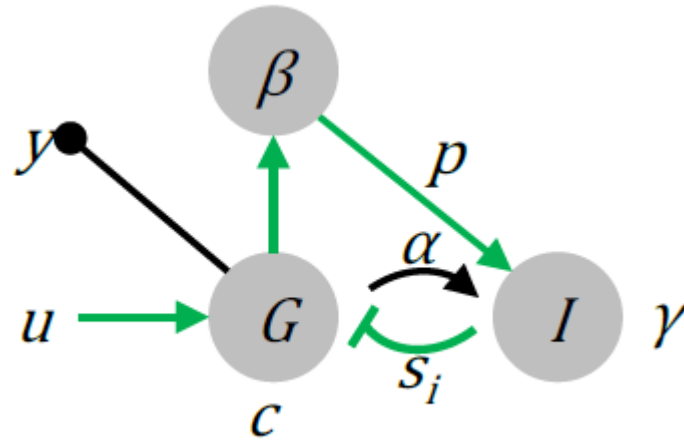
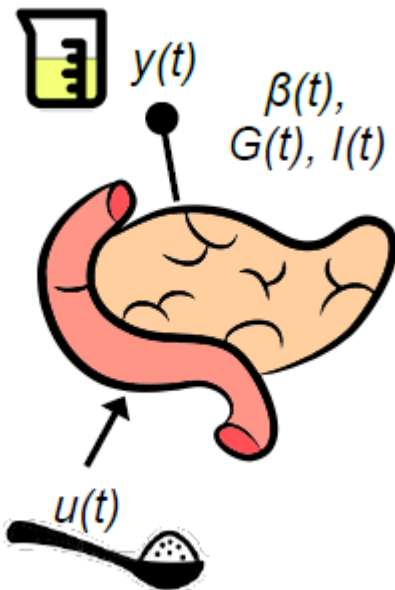


$$(u')^3 + uu' - t = 0$$

(„hyperbolische Falte“)

Symmetrien und Beobachtbarkeit

β IG-Modell der Glukoseregulation im Blutplasma



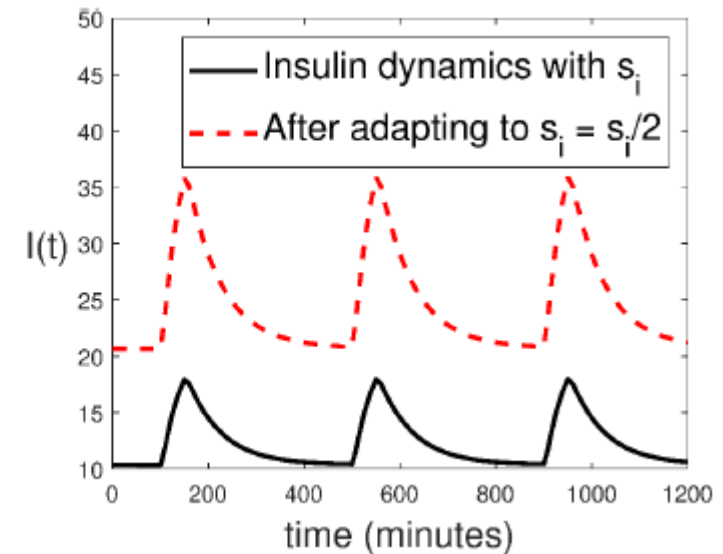
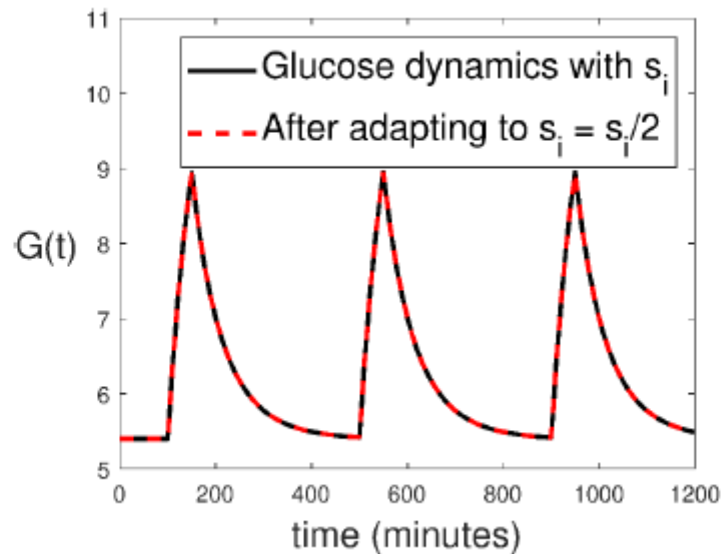
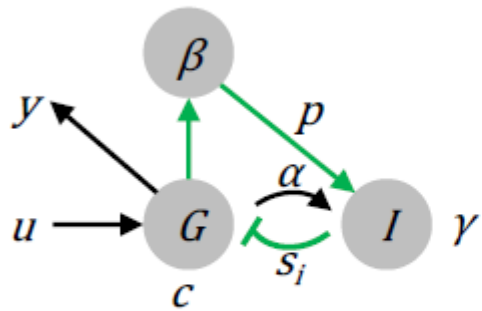
$$\begin{aligned}\dot{G} &= u - (c + s_i I)G \\ \dot{\beta} &= \beta(\lambda^+ - \lambda^-) \\ \dot{I} &= p\beta \frac{G^2}{\alpha^2 + G^2} - \gamma I \\ y &= G\end{aligned}$$

Ziel: messe **Glukoseniveau**, berechne **Insulinniveau**

Symmetrien und Beobachtbarkeit

β IG-Modell der Glukoseregulation im Blutplasma

Problem: Insulin **nicht beobachtbar**

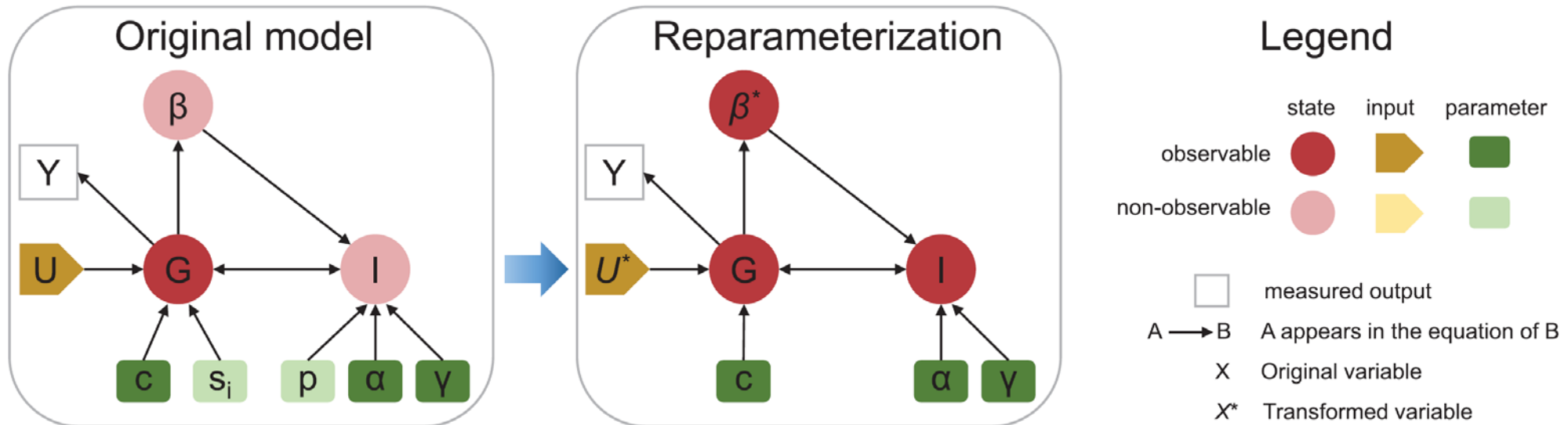


Ursache: Modell besitzt **Skalierungssymmetrien**

Symmetrien und Beobachtbarkeit

β IG-Modell der Glukoseregulation im Blutplasma

Symmetriereduktion führt zu *äquivalentem* beobachtbarem Modell



Maschinelles Lernen

Maschinelles Lernen kann bei algorithmisch un- oder nur schwer lösbaren Aufgaben eine interessante Alternative zu klassischen mathematischen Methoden darstellen.

Einige Beispielprobleme

- Lernen „*guter*“ *Koordinaten* in der algebraischen Geometrie
- Lernen von *Erhaltungsgrößen* für physikalische oder biologische Modelle
- Analyse (nicht hyperbolischer) *stationärer Punkte* dynamischer Systeme

Zugehörige Module

- MV03 Computeralgebra I (und II) *(auch für Bachelor)*
- MV05 Differentialalgebra I (und II)
- MV17 Kommutative Algebra I (und II)
- MV08 Dynamische Systeme  voraussichtlich im SoSe
- MV41 Mathematische Biologie  **Vorlesung jetzt im WiSe**

Seminare nach Bedarf bzw. Nachfrage