

20. November 2013

Gröbner-Basen

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

- (i) Es sei die Menge $\mathcal{G} = \{y - x^2, z - x^3\} \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ gegeben und $\mathcal{I} = \langle \mathcal{G} \rangle$. Geben Sie zwei Termordnungen an, so daß bezüglich der einen \mathcal{G} eine Gröbner-Basis von \mathcal{I} ist und bezüglich der anderen nicht. Begründen Sie Ihre Ergebnisse!
- (ii) Es sei $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ eine Menge von $m \leq n$ Polynomen, wobei für jedes $1 \leq i \leq m$ gilt $g_i \in \mathbb{k}[x_i]$. Zeigen Sie, daß \mathcal{G} eine universelle Gröbner-Basis des Ideals $\langle \mathcal{G} \rangle$ ist.

Aufgabe 2

- (i) Berechnen Sie unter Angabe aller Schritte eine Gröbner-Basis bezüglich der degrevlex -Ordnung für die folgenden beiden Ideale in $\mathbb{Q}[x, y, z]$:
- $\mathcal{I}_1 = \langle x^2, y^2, xy + yz \rangle$
 - $\mathcal{I}_2 = \langle y^2, xyz + z^3 \rangle$
- (ii) Implementieren Sie den Buchberger-Algorithmus in CoCoA und überprüfen Sie mit Ihrem Programm Ihre Ergebnisse bei Teil (i).