

Unter- und Überbestimmte Systeme von Differentialgleichungen

Werner M. Seiler

Zusammenfassung Die Begriffe „unter-“ bzw. „überbestimmt“ werden häufig auch im Zusammenhang mit Differentialgleichungen benutzt, da sie scheinbar ganz natürlich und klar sind. Tatsächlich ist es aber gar nicht so einfach, eine mathematisch präzise Definition anzugeben. In engem Zusammenhang dazu steht die Frage nach der Größe des Lösungsraums einer Differentialgleichung, die jedoch im allgemeinen von dem betrachteten Funktionenraum abhängt. Relativ einfache Antworten für beide Probleme lassen sich geben, wenn man sich auf den formalen Lösungsraum zurückzieht, also nur formale Potenzreihenlösungen betrachtet. Eine moderne mathematische Formulierung beruht dann auf der geometrischen Theorie der Jetbündeln und der algebraischen Dimensionstheorie polynomialer Moduln.

Schlüsselwörter Differentialgleichungen · unterbestimmtes System · überbestimmtes System · formale Theorie · Integrierbarkeit · Involution · Eichsymmetrie

Mathematics Subject Classification (2000) 35N99 · 34A09 · 35A30 · 13C15 · 58A20

1 Einleitung

Für Mathematiker ist es normalerweise selbstverständlich, daß sie nur mit exakt definierten Begriffen arbeiten. Trotzdem wird kaum ein Mathematiker stutzig, wenn er (oder sie) von einem unter- oder überbestimmten System von Differentialgleichungen hört. Dabei zeigt eine Literatursuche ziemlich schnell, daß es gar nicht so einfach ist, eine strenge Definition dieser Begriffe zu finden (selbst in Literaturstellen, in denen sie vorkommen!).

Auf Nachfrage erhält man in der Regel Antworten, die auf einem Vergleich der Anzahl der Gleichungen und der unbekannt Funktionen beruhen. Wie wir später sehen werden, ist dieser Ansatz jedoch mitunter irreführend – insbesondere in der für die Theoretische Physik wichtigen Situation, daß eine Eichsymmetrie vorliegt. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß diese Vorgehensweise wohl von der Linearen Algebra herrührt, beruht jedoch selbst hier auf einer Verwechslung von Definition und Kriterium (man wird auch kaum ein Lehrbuch der Linearen Algebra finden, das diese Begriffe tatsächlich *definiert*).

In der vorliegenden Arbeit soll eine mathematisch präzise Definition unter- und überbestimmter Systeme von Differentialgleichungen vorgestellt werden. Es wird sich herausstellen, daß eine solche Definition zum einen nicht mehr sehr anschaulich ist (man erhält allerdings eine gewisse Anschaulichkeit über nachfolgende Sätze zurück) und zum anderen einen durchaus anspruchsvollen mathematischen Apparat benötigt. Wir werden zunächst eine mehr „kochrezeptartige“ Darstellung geben, die dafür ohne fortgeschrittenere mathematische Konzepte wie Mannigfaltigkeiten oder Moduln auskommt. Anschließend skizzieren wir für Leser mit entsprechendem Kenntnisse den genauen mathematischen Hintergrund. Für eine vertiefte Behandlung der hier diskutierten Fragestellungen verweisen wir auf [32] und die dort zitierte Literatur.

Im nächsten Abschnitt werden wir kurz auf die Definition unter- bzw. überbestimmter Systeme im Rahmen der Linearen Algebra eingehen. Es folgt eine an Beispielen orientierte Einführung in die verschiedenen Möglichkeiten bei Systemen von Differentialgleichungen: in Abschnitt 3 für gewöhnliche und in Abschnitt 4 für partielle Differentialgleichungen.

In Abschnitt 5 beginnen wir damit, die eher vorher intuitive Diskussion mathematisch zu präzisieren; wir zeigen, wie der Größe des Lösungsraums einer Differentialgleichung mittels des Begriffs eines formal korrekt gestellten Anfangswertproblem quantifiziert werden kann. Anschließend betrachten wir die geometrische Modellierung von Differentialgleichungen mittels Jetbündel. Zur Veranschaulichung der Bedeutung der dabei eingeführten Begriffe behandelt Abschnitt 7 die systematische Konstruktion formaler Potenzreihenlösungen. Die effektive Anwendung der entwickelten geometrischen Theorie erfordert die Einführung algebraischer Techniken; der Übergang von der Geometrie zur Algebra basiert dabei auf dem in Abschnitt 8 diskutierten Begriffs des (Haupt)Symbols. Mit dessen Hilfe erreichen wir dann in Abschnitt 9 auch endlich unser Ziel einer präzisen Definition der Begriffe unter- bzw. überbestimmt.

2 Lineare Gleichungssysteme

Bevor wir uns Differentialgleichungen zuwenden, betrachten wir zunächst kurz die wesentlich einfachere Situation bei linearen Gleichungssystemen, die jedoch bei genauerer Betrachtung auch nicht ganz frei von Überraschungen ist.

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ heißt *unterbestimmt*, wenn es nicht alle Komponenten des Lösungsvektors x eindeutig bestimmt; dies stellt offensichtlich die natürliche *Definition* dieses Begriffs dar. Ein klassischer *Satz* der Linearen Algebra besagt nun, daß ein (lösbares) System genau dann unterbestimmt ist, wenn der Rang der Matrix A kleiner als die Dimension n des Vektors x ist, d.h. wenn wir weniger *unabhängige* Gleichungen als Unbekannte haben. Man beachte, daß auch dieses einfache Abzählkriterium nicht unmittelbar auf das Ausgangssystem angewendet werden kann, sondern daß man dieses erst mit dem Gauß-Algorithmus auf eine Treppenform bringen oder auf sonst eine Art eventuell vorhandene abhängige Gleichungen entfernen muß.

Wir sprechen von einem *wohlbestimmten* System, wenn seine Lösung eindeutig ist. Wieder sagt uns die Lineare Algebra, daß dies bei einem lösbaren System genau dann der Fall ist, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A gleich der Anzahl der Unbekannten x ist. Wenn keine abhängigen Gleichungen vorhanden sind, dann bedeutet dies, daß wir es mit einem quadratischen System zu tun haben.

Bleibt die Frage, wie ein *überbestimmtes* lineares Gleichungssystem aussieht? Solange wir wirklich von einem Gleichungssystem reden, lautet die – vielleicht überraschende – Antwort, daß es so etwas nicht gibt, da offensichtlich für jede $(m \times n)$ -Matrix A gilt, daß

$\text{rg } A \leq n$ (das System kann nicht mehr als n unabhängige Gleichungen enthalten), und wir damit für lösbar Systeme bereits alle Möglichkeiten ausgeschöpft haben. Die Situation ändert sich, wenn wir nicht mehr von einem linearen Gleichungssystem, sondern von einem linearen Ausgleichsproblem reden.¹ Hier macht es keinen Sinn, von linearer Abhängigkeit zwischen den Gleichungen zu sprechen, da diese in der Regel inkonsistent sind, und man kann wirklich einfach die Anzahl der Ausgangsgleichungen zählen.

In den wenigsten Vorlesungen über Lineare Algebra werden die Begriffe unter- bzw. überbestimmt vorkommen, da man hier mittels der Dimensionstheorie affiner Räume viel präziser formulieren kann: offensichtlich bedeutet Unterbestimmtheit gerade, daß die Dimension des Lösungsraums positiv ist, da der oben angesprochene Satz gerade diese Dimension mit dem Rang der Matrix A verknüpft. Man sollte vielleicht noch bemerken, daß dieser einfache Zusammenhang zwischen der Anzahl der Gleichungen und der Dimension des Lösungsraums bereits dann verloren geht, wenn man allgemeiner polynomiale Gleichungen betrachtet, also von der Linearen Algebra in Richtung Algebraische Geometrie geht: der (verallgemeinerte) Krullsche Hauptidealsatz liefert dann nur noch eine Ungleichung – siehe [19] für eine ausführlichere Diskussion solcher Fragen.

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die allererste Differentialgleichung, die ein Mathematiker in seinem Leben sieht, ist typischerweise von der Gestalt $u' = f(x, u)$. Hierbei steht u , die *abhängige Variable*, für eine unbekannte Funktion $u = u(x)$ der *unabhängigen Variablen* x und u' ist die übliche Kurznotation für die erste Ableitung du/dx . Es handelt sich also um eine skalare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Bei intensiverer Beschäftigung mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen zeigt sich jedoch schnell, daß es für viele Fragen keinen nennenswerten Unterschied macht, wenn man auf Systeme der Form $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ für einen Vektor \mathbf{u} abhängiger Variablen verallgemeinert. So erhält man unter relativ schwachen Stetigkeitsbedingungen an die rechte Seite \mathbf{f} einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen; insbesondere werden keine weiteren strukturellen Annahmen benötigt. Trivialerweise enthält jedes System dieser Form genau so viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen \mathbf{u} vorliegen. Es stellt keine wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit dar, daß wir hier angenommen haben, daß ein System erster Ordnung vorliegt, da sich jedes System höherer Ordnung elementar in ein äquivalentes System erster Ordnung umschreiben läßt, in dem man zusätzliche abhängige Variablen einführt, die Ableitungen der ursprünglichen abhängigen Variablen entsprechen.

Die Situation ändert sich deutlich, wenn man zu einem allgemeinen System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\mathbf{F}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \mathbf{0}$ übergeht, wobei wir nun auch nicht mehr voraussetzen wollen, daß die Anzahl der Gleichungen und der unbekannt Funktionen übereinstimmt. Solche Systeme treten ganz natürlich in zahlreichen Anwendungsgebieten auf, z.B. bei der Simulation mechanischer Systeme mit Zwangsbedingungen oder elektrischer Schaltkreise, in der Steuerungs- und Regelungstechnik oder bei der Diskretisierung mancher partieller Differentialgleichungen (viele konkrete Beispiele werden in [1] diskutiert – siehe auch [18, 24]). Unglücklicherweise hat jedes Gebiet seine eigene Terminologie entwickelt und so gibt es eine Vielzahl von Begriffen für diese allgemeineren Formen

¹ Zu einer Betrachtung als Ausgleichsproblem wird man auch automatisch geführt, wenn man mit einer inexakten Arithmetik, d.h. unter dem Einfluß von Rundungsfehlern, arbeitet, da nun die lineare Abhängigkeit von Gleichungen nicht mehr sicher entschieden werden kann.

gewöhnlicher Differentialgleichungen: implizite Systeme, singuläre Systeme, differential-algebraische Systeme (oft kurz DAE genannt nach der englischen Bezeichnung *differential algebraic equations*), Systeme in Deskriptorform, ...

Sowohl die theoretische als auch die numerische Behandlung solcher allgemeiner Systeme führt zu neuen Phänomenen, die bei der klassischen aufgelösten Form $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$ nicht auftreten. Aufgrund der impliziten Abhängigkeit von \mathbf{u}' kann es vor allem zu einer ganzen Reihe verschiedener Arten singulären Verhaltens kommen, was wir jedoch hier trotz großer Bedeutung für die Praxis ignorieren werden (insbesondere werden wir stets annehmen, daß alle relevanten Jacobi-Matrizen konstanten Rang besitzen). Uns interessiert hier mehr die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (in einer Umgebung eines regulären Punktes).

A priori läßt sich hier für ein allgemeines System keine Aussage treffen. Der Grund ist die mögliche Existenz „versteckter“ Gleichungen, die aus dem ursprünglichen System durch eine Kombination von Differentiationen und algebraischen Umformungen gewonnen werden können. In der Mathematik ist der Ausdruck *Integrabilitätsbedingungen* üblich, der allerdings häufig zu Mißverständnissen führt, da es sich weder um Bedingungen an eventuell vorhandene Parameter noch um von außen zusätzlich auferlegte Einschränkungen handelt: die so gewonnenen Gleichungen werden von jeder Lösung des Ausgangssystems automatisch erfüllt. Falls es möglich ist, eine Gleichung der Form $1 = 0$ abzuleiten, dann kann es offensichtlich keine Lösung geben und das System ist inkonsistent.

Die systematische Suche nach Integrabilitätsbedingungen wird als *Vervollständigung* des Ausgangssystems bezeichnet; sie kann als Verallgemeinerung des Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme aufgefaßt werden. Wie dieser verändert sie den Lösungsraum nicht, sondern dient lediglich dazu, leichter Aussagen über dessen Eigenschaften zu gewinnen. In der numerischen Theorie spricht man häufig von einer *Indexreduktion* anstelle einer Vervollständigung; Physiker kennen für den Spezialfall Hamiltonscher Systeme den sogenannten *Dirac-Algorithmus*.

Aufgrund unserer Regularitätsannahmen dürfen wir annehmen, daß wir möglichst viele Gleichungen nach einer Ableitung aufgelöst haben. In dieser sogenannten *semi-expliziten Form* spalten wir den Vektor \mathbf{u} in zwei Komponenten \mathbf{v} und \mathbf{w} auf, so daß unser System folgende Form annimmt:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{g}(x, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'), \quad (1a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}(x, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (1b)$$

(Die Dimension der Komponente \mathbf{v} , d.h. die Anzahl der Gleichungen (1a), die nach einer Ableitung aufgelöst werden können, entspricht offensichtlich dem Rang der Jacobi-Matrix $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u}'$). Die Form (1) erklärt auch die Bezeichnung „differential-algebraisches“ System, da offensichtlich eine Mischung aus Differentialgleichungen (1a) und algebraischen Gleichungen (1b) vorliegt. Es ist nun klar, daß eventuell durch Ableiten des algebraischen Anteils des Systems neue unabhängige Gleichungen, d.h. Integrabilitätsbedingungen, erzeugt werden können. Allgemein tritt dieses Problem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen immer dann auf, wenn ein System Gleichungen unterschiedlicher Ordnung umfaßt.

Beispiel 1 Wir betrachten ein einfaches, aber typisches Beispiel aus der Mechanik: die Bewegungsgleichungen eines Pendels. Die masselose Pendelstange besitze die Länge ℓ und der Pendelkörper die Masse m (siehe Abb. 1). Die Position des Pendels werde durch die kartesischen Koordinaten (x, y) angegeben. Offensichtlich liefert dies zu viele Freiheitsgrade, denn wir könnten das Pendel ausschließlich mit dem Auslenkungswinkel θ beschreiben.

Diese Redundanz wird zu Zwangsbedingungen führen. Im vorliegenden Fall wäre es trivial, die Bewegungsgleichungen direkt für θ aufzustellen und so zu einer Beschreibung ohne Zwangsbedingungen zu kommen. Der Entwurf komplexer mechanischer Systeme erfolgt heute aber in der Regel modular und die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Komponenten wird dann durch Zwangsbedingungen modelliert. Unser Beispiel ist ein einfacher Prototyp für die Bewegungsgleichungen, die eine solche Vorgehensweise liefert.

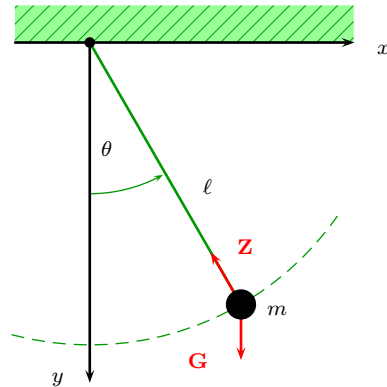


Abb. 1 Pendel in kartesischen Koordinaten

Zum Aufstellen der Newtonschen Bewegungsgleichungen benötigen wir die auf das Pendel einwirkenden Kräfte. Dies ist zum einen die in y -Richtung wirkende Gravitationskraft \mathbf{G} der Größe mg mit der Erdbeschleunigung g sowie zum anderen die Zugkraft \mathbf{Z} in der Pendelstange, die den Pendelkörper auf seiner Kreisbahn hält. Von der Zugkraft \mathbf{Z} kennen wir a priori nur die Richtung, nämlich zum Aufhängepunkt hin, aber nicht ihre Größe λ . Daher betrachten wir zunächst λ als eine weitere Unbekannte (Lagrange-Multiplikator). Nach Newton erhalten wir damit als Bewegungsgleichungen:²

$$m\ddot{x} = -\lambda x, \quad m\ddot{y} = mg - \lambda y. \quad (2a)$$

Außerdem muß das Pendel noch die folgende Zwangsbedingung erfüllen:

$$x^2 + y^2 = \ell^2 \quad (2b)$$

(der Pendelkörper bewegt sich auf einem Kreis mit Radius ℓ). Sie eliminiert die oben angesprochene Redundanz in unserer Modellierung, denn die Gleichung (2b) läßt sich offensichtlich lösen, in dem wir schreiben $x = \ell \sin \theta$ und $y = \ell \cos \theta$. Man kann sich aber leicht vorstellen, daß bei komplizierteren Problemen ein explizites Auflösen der Zwangsbedingungen nicht mehr so einfach möglich ist.³

² Wir folgen hier der üblichen Konvention, daß Zeitableitungen durch einen Punkt anstelle eines Strichs gekennzeichnet werden. Wir haben es hier also mit Gleichungen zweiter Ordnung zu tun.

³ Selbst in Fällen, wo ein Auflösen möglich ist, muß es nicht unbedingt vorteilhaft sein. Man erhält dann zwar weniger Gleichungen; diese sind dafür unter Umständen deutlich komplizierter. So erfordert das Auflösen in der Regel, daß algebraische oder trigonometrische Funktionen eingeführt werden müssen. Dies erschwert nicht nur die analytische Behandlung der Bewegungsgleichungen, auch eine numerische Auswertung wird dadurch deutlich aufwendiger.

Die Zwangsbedingung (2b) muß zu allen Zeiten t erfüllt sein. Damit muß aber auch ihre Zeitableitung identisch verschwinden und Differenzieren liefert die Integrabilitätsbedingung

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0. \quad (2c)$$

Anschaulich besagt sie, daß der Geschwindigkeitsvektor des Pendels stets tangential an den Kreis anliegt. Erneutes Differenzieren (d.h. Betrachten des Beschleunigungsvektors) führt zu der Gleichung

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0. \quad (2d)$$

Die Beschleunigungen \ddot{x} und \ddot{y} sind durch die Newtonschen Gleichungen gegeben und Einsetzen von (2a) in (2d) liefert nun eine algebraische Gleichung für den Multiplikator λ :

$$\lambda = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + gy}{x^2 + y^2}. \quad (2e)$$

Durch die Analyse der versteckten Integrabilitätsbedingungen sind wir also in der Lage die Größe der Zugkraft \mathbf{Z} in der Pendelstange explizit zu bestimmen (was auch für praktische Anwendungen sehr wichtig ist, da in einem realen System die Stange bei zu großer Belastung bricht). Streng genommen müßte auch die Gleichung (2e) noch zweimal differenziert werden, um auch Gleichungen für die Ableitungen $\dot{\lambda}$ und $\ddot{\lambda}$ zu erhalten und damit die Vollständigkeit der Bewegungsgleichungen zu beenden. Praktisch ist dies aber nicht nötig, da (2e) den Multiplikator bereits eindeutig bestimmt.

Man beachte noch folgenden Effekt der Zwangsbedingungen. Bei einem expliziten System zweiter Ordnung für drei Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$ können wir insgesamt sechs Anfangsbedingungen vorgeben, z.B. die Werte $x(0)$, $y(0)$, $\lambda(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$, $\dot{\lambda}(0)$. Hier können wir jedoch nur zwei Bedingungen an die Lösungen an die Lösung stellen: für λ sind keinerlei Vorgaben möglich aufgrund der expliziten Gleichung (2e) und aufgrund der Gleichungen (2b) und (2c) können wir nur $x(0)$ oder $y(0)$ bzw. nur $\dot{x}(0)$ oder $\dot{y}(0)$ vorgeben (dies entspricht natürlich genau der Anzahl an Anfangsbedingungen für die äquivalente Gleichung $\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \sin \theta$). Aus diesem Grund ist es naheliegend, das Gesamtsystem (2) als überbestimmt anzusehen, obwohl das Ausgangssystem bestehend aus (2a) und (2b) genauso viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen enthielt. \triangleleft

4 Partielle Differentialgleichungen

Bei partiellen Differentialgleichungen gibt es naturgemäß ein reicheres Spektrum an Möglichkeiten. Selbstverständlich kann auch hier ein allgemeines System Gleichungen unterschiedlicher Ordnung enthalten und in diesem Fall können wir wieder eventuell durch Differenzieren der Gleichungen niedrigerer Ordnung Integrabilitätsbedingungen produzieren. In der Praxis spielt aber ein anderer Mechanismus zur Erzeugung von Integrabilitätsbedingungen eine wesentlich größere Rolle, nämlich (verallgemeinerte) Überkreuzableitungen.

Auch das Studium partieller Differentialgleichungen beginnt man üblicherweise mit dem skalaren Fall; im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist jetzt aber der Übergang zu Systemen nicht mehr trivial. Um eine ähnliche Theorie zu erhalten, benötigt man eine *strukturelle* Annahme: es muß die Existenz einer ausgezeichneten unabhängigen Variablen t (die wir der Einfachheit halber als „Zeit“ bezeichnen wollen, auch wenn das nicht immer Sinn macht) vorausgesetzt werden, so daß jede Gleichung in dem System nach einer Zeitableitung aufgelöst werden kann.

Wenn wir uns im folgenden zunächst wieder auf Systeme erster Ordnung beschränken, dann erhalten wir damit also die Form

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x). \quad (3)$$

Hier bezeichnet der Vektor \mathbf{x} alle verbleibenden unabhängigen Variablen und die abhängigen Variablen \mathbf{u} repräsentieren jetzt Funktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Der Vektor \mathbf{u}_t enthält alle Zeitableitungen dieser Funktionen und \mathbf{u}_x ist eine Abkürzung für alle ersten Ableitungen nach den „Ortsvariablen“ \mathbf{x} . Systeme, die – eventuell nach einer Koordinatentransformation – auf die Form (3) gebracht werden können, heißen Systeme in *Cauchy-Kovalevskaya-Form* (oder *normale* Systeme), da für sie mit dem Satz von Cauchy-Kovalevskaya ein allgemeiner Existenz- und Eindeigkeitssatz (für analytische Lösungen) vorliegt – siehe z.B. [15, 25]. Wir werden später sehen, daß genau diese Systeme wohlbestimmt (also weder unter- noch überbestimmt) sind. Offensichtlich umfaßt jedes System der Form (3) genau so viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen, allerdings gilt nicht die Umkehrung: nicht jedes System mit derselben Anzahl von Gleichungen und unbekannt Funktionen kann auf die Form (3) gebracht werden, wie wir unten mit einem Beispiel demonstrieren werden.

Anmerkung 2 Man sollte an dieser Stelle noch anmerken, daß bei partiellen Differentialgleichungen die Beschränkung auf Systeme erster Ordnung eine leichte Einschränkung bedeutet, da hier die Transformation Gleichungen höherer Ordnung auf ein äquivalentes System erster Ordnung immer zu einem überbestimmten System führt. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Wir führen zwei neue abhängige Variablen ein durch die Gleichungen

$$v = u_x, \quad w = u_y. \quad (4a)$$

Damit können wir die Laplace-Gleichung schreiben als

$$v_x + w_y = 0. \quad (4b)$$

Scheinbar haben wir damit ein System erster Ordnung mit genau so vielen unbekannt Funktionen wie Gleichungen erhalten. Wenn man aber die erste Gleichung in (4a) nach y und die zweite nach x ableitet, dann sieht man sofort, daß die Integrabilitätsbedingung

$$v_y - w_x = 0 \quad (4c)$$

entsteht. Der Laplace-Gleichung entspricht also ein System erster Ordnung mit vier Gleichungen für drei unabhängige Funktionen. Die Integrabilitätsbedingung (4c) ist dabei entscheidend dafür, daß das System (4) die Elliptizität der Laplace-Gleichung erhält (siehe [17] für eine ausführlichere Diskussion solcher Fragen). \triangleleft

Beispiel 3 Wir betrachten die *inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen*, die das Strömungsverhalten inkompressibler Flüssigkeiten beschreiben. Hier haben wir als unabhängige Variablen die Ortsvariablen x, y, z sowie die Zeit t und als abhängige Variablen zum einen den dreidimensionalen Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} der Strömung und zum anderen den skalaren Druck p . Die Erhaltungssätze für den Impuls bzw. die Masse führen dann zu den folgenden Differentialgleichungen für \mathbf{u} und p :

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p, \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5b)$$

Der Diffusionsterm $\nu \Delta \mathbf{u}$ mit dem Laplace-Operator $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ und der Diffusionskonstanten ν , der (5a) zu einer Gleichung zweiter Ordnung macht, ist für unsere Zwecke nicht so wichtig, so daß wir ihn zunächst ignorieren (und damit streng genommen die *Euler-Gleichungen* betrachten) und so tun, als ob wir ein System erster Ordnung behandeln.

Oberflächlich betrachtet, handelt es sich bei (5) um ein System mit der gleichen Anzahl von Gleichungen und unbekannt Funktionen, so daß man erwarten würde, daß das System wohlbestimmt ist. Ein genauerer Blick zeigt jedoch, daß es nicht möglich ist, (5) auf Cauchy-Kovalevskaya-Form zu bringen, da keine Zeitableitung des Drucks auftritt. Auch eine Koordinatentransformation bringt hier keine Abhilfe.

Dafür überzeugt man sich leicht davon, daß in (5) eine Integrierbarkeitsbedingung versteckt ist (dies wäre bei einem System in Cauchy-Kovalevskaya-Form nicht möglich): wenn man die Zeitableitung der Inkompressibilitätsbedingung (5b) von der Divergenz des Teilsystems (5a) abzieht, erhält man

$$\Delta p = -\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \quad (5c)$$

d.h. eine Poisson-Gleichung für den Druck. Diese zusätzliche Gleichung ist wesentlich für die numerische Behandlung von (5), da ohne sie kein numerisches Verfahren zu einem geschlossenen Gleichungssystem führt. Wir erwarten also, daß die vollen Navier-Stokes-Gleichungen (d.h. inklusive der Poisson-Gleichung (5c) für den Druck) ein überbestimmtes System darstellen, was sich auch als richtig erweisen wird. \triangleleft

Man kann nun – analog zu unserer Vorgehensweise bei gewöhnlichen Differentialgleichungen – anfangen, bei einem allgemeinen System partieller Differentialgleichungen $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_x) = \mathbf{0}$ so viele Gleichungen wie möglich nach einer Zeitableitung aufzulösen. Entsprechend der semi-expliziten Form (1) erhalten wir dann bei einer geeigneten Aufspaltung von \mathbf{u} in zwei Komponenten \mathbf{v} und \mathbf{w} ein System der Form

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x, \mathbf{w}_t), \quad (6a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_x, \mathbf{w}_x). \quad (6b)$$

Man beachte jedoch folgenden fundamentalen Unterschied: während (1b) eine algebraische Gleichung ist, ist (6b) in der Regel immer noch eine Differentialgleichung erster Ordnung. Von daher überzeugt die öfters zu sehende Terminologie PDAE (von der englischen Bezeichnung *partial differential algebraic equations*) nicht sonderlich.

Wenn \mathbf{x} wirklich ein Vektor ist, d.h. wenn wir insgesamt mehr als zwei unabhängige Variablen haben, dann stellt im Gegensatz zu (1) das System (6) noch keine Normalform dar. Denn wir können unter den Ortsvariablen \mathbf{x} eine weitere Variable, sagen wir z , auszeichnen und versuchen, möglichst viele der Gleichungen im Teilsystem (6b) nach einer z -Ableitung aufzulösen. Dies führt zu einer weiteren Partitionierung der Komponente \mathbf{w} der abhängigen Variablen. Bei einer hinreichend großen Anzahl von unabhängigen Variablen (und Gleichungen im System) muß dieser Schritt noch mehrmals durchgeführt werden, bis eine Normalform erreicht wird, die dann ähnlich zu der aus der Linearen Algebra vertrauten Treppenform ist (die Jacobi-Matrix des Systems besitzt dann in der Tat Treppenform).

Beispiel 4 Die Maxwell-Gleichungen bilden die Grundlage der Elektrodynamik und beschreiben die zeitliche und räumliche Entwicklung des elektrischen Felds \mathbf{E} und des magnetischen Felds \mathbf{B} . Wenn wir sie der Einfachheit halber im Vakuum betrachten, besitzen sie in natürlichen Einheiten die Form:

$$\mathbf{E}_t = \nabla \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_t = -\nabla \times \mathbf{E} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (7a)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{E}, \quad 0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B}. \quad (7b)$$

Offensichtlich besitzen sie bereits die Form (6). Die Evolutionsgleichungen (7a) stellen für sich alleine genommen ein System in Cauchy-Kovalevskaya-Form dar. Da wir aber zusätzlich noch die Gauß- oder Divergenzgleichungen (7b) haben, erwarten wir intuitiv, daß (7) ein überbestimmtes System ist. Dies wird sich später auch als richtig erweisen.

Die Überbestimmtheit äußert sich u.a. darin, daß wir (ähnlich wie beim Pendel) als Anfangsbedingungen die Funktionen $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(t=0)$ und $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(t=0)$ nicht beliebig vorgeben dürfen, sondern beide Funktionen müssen divergenzfrei gewählt werden. Aus formaler Sicht können wir auch sagen, daß wir z.B. die x - und die y -Komponente von \mathbf{E}_0 frei wählen dürfen, während wir die z -Komponente von \mathbf{E}_0 nur auf der Ebene $z=0$ vorschreiben können (und analog für das Feld \mathbf{B}_0). Hier betrachten wir dann die Divergenzgleichungen (7b) als eine „Evolutionsgleichung“ für \mathbf{E}_0 mit der „Zeit“ z .⁴

Bei diesen Betrachtungen haben wir implizit vorausgesetzt, daß keine versteckten Integritätsbedingungen in (7) existieren. Dies ist aber nicht selbstverständlich, sondern muß – wie bei jedem überbestimmten System – explizit überprüft werden. So können wir von den Gleichungen in (7a) die Divergenz nehmen und davon die Zeitableitung der Gleichungen in (7b) abziehen. Dies führt zu den beiden Gleichungen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, die aber nach einem klassischen Satz der Vektoranalysis für jedes Vektorfeld erfüllt sind und damit keine neuen Bedingungen an die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} stellen. \triangleleft

Beispiel 5 Im Rahmen der Elementarteilchenphysik bevorzugt man es, den Elektromagnetismus als eine $U(1)$ -Yang-Mills-Theorie zu beschreiben. Wenn wir uns der Einfachheit halber auf eine Raumdimension beschränken, dann erhalten wir als Feldgleichungen das folgende System zweiter Ordnung für zwei unbekannte Funktionen $u(x, t)$ und $v(x, t)$

$$v_{tt} - u_{xt} = 0, \quad v_{tx} - u_{xx} = 0. \quad (8)$$

Für eine Cauchy-Kovalevskaya-Form zweiter Ordnung müßte es möglich sein, die eine Gleichung nach u_{tt} und die andere Gleichung nach v_{tt} aufzulösen. In der angegebenen Form kann offensichtlich nur nach v_{tt} aufgelöst werden, da u_{tt} nirgends explizit auftritt. Es ist sehr instruktiv, zu versuchen, durch eine Koordinatentransformation $\bar{x} = ax + bt$, $\bar{t} = cx + dt$ eine Cauchy-Kovalevskaya-Form zu erreichen. Man stellt schnell fest, daß dies nicht möglich ist, da beim Auflösen immer entweder der Koeffizient vor $u_{\bar{t}\bar{t}}$ oder der vor $v_{\bar{t}\bar{t}}$ verschwindet.

Man könnte angesichts der bisherigen Beispiele befürchten, daß auch hier versteckte Integritätsbedingungen zu einer Überbestimmtheit führen. Tatsächlich wird sich (8) aber später als ein unterbestimmtes System entpuppen, obwohl es genau so viele Gleichungen wie unbekannte Funktionen enthält! Aus physikalischer Sicht ist dieses Ergebnis nicht überraschend, sondern sogar notwendig, da die Yang-Mills-Gleichungen den Prototyp einer Eichtheorie darstellen, d.h. einer Theorie, die invariant unter einer Symmetrie ist. In unserem Fall heißt dies konkret: wenn $\hat{u}(x, t)$, $\hat{v}(x, t)$ eine Lösung von (8) sind, dann definieren für jede beliebige Funktion $\Lambda(x, t)$ die Funktionen $\hat{u}(x, t) + \Lambda_t(x, t)$ und $\hat{v}(x, t) + \Lambda_x(x, t)$ wieder eine Lösung. Diese Beobachtung bedeutet aber, daß wir eine Komponente des Lösungsvektors $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ frei wählen können; d.h. wir finden in der Tat genau das Verhalten, daß wir intuitiv mit einem unterbestimmten System verbinden. \triangleleft

5 Die Größe des Lösungsraums

Wie wir schon in der Linearen Algebra gesehen haben, sagen Begriffe wie „unter-“ oder „überbestimmt“ offensichtlich etwas über die Größe des Lösungsraums des Systems aus.

⁴ Aufgrund des elliptischen Charakters der Divergenzgleichungen führt diese Sichtweise nicht zu einem wohlgestellten Problem, ist aber für formale Überlegungen trotzdem oft nützlich.

Die Frage ist nur, wie man diese „Größe“ definieren oder gar quantifizieren soll. Eine Möglichkeit besteht zum Beispiel darin, zu untersuchen, wieviele *frei wählbare* Anfangsbedingungen man stellen muß, um eine eindeutige Lösung zu spezifizieren; d.h. wir fassen die Anfangsdaten als eine Parametrisierung des Lösungsraums auf und schauen nun, wie viele Parameter wir benötigen.⁵

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dies im Prinzip sehr einfach, wie wir beim Pendel (Beispiel 1) bereits gesehen haben. Dort stellte sich *nach der expliziten Konstruktion aller versteckten Integrabilitätsbedingungen* heraus, daß wir nur zwei der sechs möglichen Anfangsbedingungen – z.B. $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ – frei wählen können, da dann durch die Gleichungen in unserem System auch alle anderen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt sind. Ein Ingenieur oder Physiker würde daher von einem System mit einem Freiheitsgrad⁶ sprechen, was auch unserer Intuition entspricht, denn natürlich können wir das Pendel einfach durch den Auslenkungswinkel θ beschreiben.

Betrachten wir nun eine offensichtlich unterbestimmte Gleichung wie $\dot{x} = ax + bu$ für zwei unbekannte Funktionen $x(t)$ und $u(t)$. Gleichungen dieser Form werden z.B. im Rahmen der linearen Steuerungs- und Regelungstechnik studiert. Um zu einer eindeutigen Lösung zu kommen, müssen wir hier als „Anfangsbedingung“ eine der beiden unbekannt Funktionen explizit vorgeben. Z.B. führt die Vorgabe $x(0) = f$ und $u(t) = g(t)$ mit einer Konstanten f und einer bekannten Funktion $g(t)$ zu einer eindeutigen Lösung. Der unterbestimmte Charakter der Gleichung drückt sich durch das Auftreten einer frei wählbaren *Funktion* anstelle von frei wählbaren *Konstanten* aus.

Wir können also bei gewöhnlichen Differentialgleichungen folgende provisorische „Definitionen“ geben: unterbestimmte Systeme sind dadurch charakterisiert, daß frei wählbare Funktionen unter den Anfangsbedingungen auftreten, während bei einem überbestimmten System weniger Parameter vorgeben werden können als der Anzahl abhängiger Variablen entspricht. Wie Beispiel 1 deutlich zeigte, können wir aber die richtige Anzahl der zulässigen Anfangsbedingungen erst dann bestimmen, wenn wir alle versteckten Integrabilitätsbedingungen explizit konstruiert haben. Deren Konstruktion ist nicht schwer, wenn wir annehmen, daß uns das System stets in der semi-expliziten Form (1) vorliegt, da dann Integrabilitätsbedingungen nur durch Differenzieren der algebraischen Gleichungen (1b) erhalten werden können (die so gewonnenen Integrabilitätsbedingungen können aber wieder zu weiteren Bedingungen führen, wenn sie algebraisch sind!).

Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Lage einiges komplizierter. Zunächst erwarten wir hier, daß die Anfangsbedingungen praktisch immer frei wählbare Funktionen enthalten; wir werden also etwas genauer hinsehen müssen, um unterbestimmte Systeme erkennen zu können. Dann haben wir bisher die Frage, in welchem Funktionenraum wir nach Lösungen suchen wollen, ignoriert; in der modernen funktionalanalytisch geprägten Theorie partieller Differentialgleichungen stellt dies aber einen zentralen Punkt dar.⁷ Zu guter Letzt wird nun auch noch die explizite Konstruktion versteckter Integrabilitätsbedingungen

⁵ Da es uns hier rein um eine formale Größenbestimmung geht, ist es wieder völlig unerheblich, ob für das gegebene System ein Anfangswertproblem korrekt gestellt ist oder nicht.

⁶ Da man es in den Natur- und Ingenieurwissenschaften meistens mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun hat, entspricht *ein* Freiheitsgrad *zwei* Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit bei mechanischen Systemen).

⁷ Selbst wenn man ausschließlich Systeme in Cauchy-Kovalevskaya-Form betrachtet, ist man hier nicht vor Überraschungen gefeit. So zeigte Lewy [21] die Existenz eines normalen linearen Systems mit glatten Koeffizienten, das keine glatten Lösungen zuläßt. Siehe [12, Chapt. VI] für eine ausführliche Diskussion und Erklärung dieses Phänomens.

deutlich komplizierter, da ein weiterer Mechanismus für ihre Erzeugung auftritt, nämlich (verallgemeinerte) Überkreuzableitungen.

Beginnen wir mit dem zweiten Punkt. Hier machen wir es uns ganz einfach, in dem wir uns auf formale Potenzreihenlösungen zurückziehen. Ein Argument hierfür ist, daß wir uns über funktionalanalytische Aspekte erst dann Gedanken machen sollten, wenn geklärt ist, ob wenigstens formale Lösungen existieren. Außerdem wird sich zeigen, daß sich die Größe des formalen Lösungsraums mit Hilfe algebraischer Techniken leicht quantifizieren läßt. Über die Betrachtung von Anfangswertproblemen kann man sich dann auch wieder in Richtung praktisch relevanter Funktionenräume vorarbeiten.

Die Frage nach der effektiven Vervollständigung von Systemen partieller Differentialgleichungen (also der expliziten Konstruktion aller versteckten Integrabilitätsbedingungen) können wir aus Platzgründen in dieser Arbeit nicht behandeln. Ein konkreter Algorithmus für lineare Systeme, der auf den geometrischen und algebraischen Ideen der nächsten Abschnitte beruht, wurde in [10] vorgestellt; rein algebraische Ansätze für Systeme mit polynomialen Nichtlinearitäten werden in [13] behandelt. Allgemein verweisen wir auf [32, Chapt. 7] für eine Diskussion dieses Themas mit zahlreichen Literaturhinweisen. Wir möchten an dieser Stelle nur erwähnen, daß das wesentliche Problem bei der Vervollständigung nicht im Auffinden der versteckten Bedingungen liegt, sondern im Erkennen, daß alle versteckten Bedingungen gefunden wurden (vergleiche Beispiel 7 unten).

Bleibt noch der folgende Punkt: angenommen, wir wissen bereits, daß ein gegebenes System partieller Differentialgleichungen keine Integrabilitätsbedingungen mehr versteckt, wie finden wir geeignete Anfangsbedingungen für dieses System? Hierbei ist zunächst zu beachten, daß wir bei allgemeinen Systemen die einfache Vorstellung, daß wir eine unabhängige Variable, z.B. x_n , als „Zeit“ betrachten und alle abhängigen Variablen dann für $x_n = 0$ vorgeben, aufgeben müssen. Im allgemeinen würden diese Anfangsdaten nämlich keine Parametrisierung des Lösungsraums darstellen, da sie nicht frei wählbar sind, sondern immer noch Konsistenzbedingungen genügen müssen. Wir wollen an dieser Stelle keine allgemeine Theorie für das Aufstellen geeigneter Anfangsbedingungen aufstellen, da hierzu einige algebraische Theorie nötig wäre, sondern stattdessen nur zwei Beispiele studieren.

Beispiel 6 Wir betrachten folgendes System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x, t)$:

$$u_{tt} = u_t, \quad u_{xt} = u_x. \quad (9)$$

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, daß unser System vollständig ist. Offensichtlich müssen wir dazu eine Überkreuzableitung durchführen, nämlich die erste Gleichung nach x und die zweite nach t ableiten und dann die Differenz der Ergebnisse nehmen. Da wir hier aber Null erhalten, gibt es keine versteckte Integrabilitätsbedingung. Eine andere Situation hätte sich ergeben, wenn wir in beiden Gleichungen als rechte Seite u gewählt hätten. Dann ergäbe sich die Integrabilitätsbedingung $u_t = u_x$, d.h. eine zusätzliche Gleichung erster Ordnung, die von jeder Lösung automatisch erfüllt wird. Eine Differentiation dieser Gleichung nach x würde dann sogar noch zu einer zweiten Integrabilitätsbedingung $u_{xx} = u$ führen.

Naiv würde man zunächst vielleicht probieren, für unser System die beiden Anfangsbedingungen $u(t = 0) = f(x)$ und $u_t(t = 0) = g(x)$ vorzugeben. Dies wären auch die richtigen Anfangsbedingungen, wenn wir es nur mit der ersten Gleichung zu tun hätten. Man sieht aber sofort, daß die zweite Gleichung die Bedingung $g'(x) = 0$ erzwingt, so daß wir für u_t höchstens eine Vorgabe der Form $u_t(t = 0, x = 0) = g$ mit einer Konstanten g

machen dürfen. In der Tat enthalten die Anfangsbedingungen für allgemeine Systeme partieller Differentialgleichungen in der Regel Funktionen mit einer unterschiedlichen Zahl von Variablen. In unserem Fall sind die beiden Bedingungen

$$u(t = 0) = f(x), \quad u_t(t = 0, x = 0) = g \quad (10)$$

auch eine richtige Wahl, die zu einem *formal korrekten* Anfangswertproblem führen, d.h. zu einem Anfangswertproblem, bei dem jede (formale) Lösung bestimmt ist durch eine eindeutige Wahl der Funktion $f(x)$ bzw. der Konstanten g und umgekehrt auch jede Wahl von $f(x)$ und g zu einer Lösung führt (siehe [32, Sect. 9.3] für eine ausführlichere Diskussion dieses Begriffs).

Dies kann man wie folgt begründen. Das System (9) ist aufgelöst nach den beiden „Leitern“ u_{tt} und u_{xt} . Für eine formale Potenzreihenlösung mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$ benötigen wir die Werte aller Ableitungen von u an diesem Punkt. Durch Differenzieren unserer beiden Gleichungen kann man alle Ableitungen berechnen bis auf $u(0, 0)$, $u_t(0, 0)$ sowie alle reinen x -Ableitungen. Offensichtlich sind die Anfangsbedingungen (10) genau so gewählt, daß sie diese fehlenden Ableitungswerte liefern: wir benötigen eine Funktion von x , um die unendlich vielen x -Ableitungen zu bestimmen und dann bleibt nur noch $u_t(0, 0)$ übrig, das aber durch die zweite Bedingung bestimmt wird.

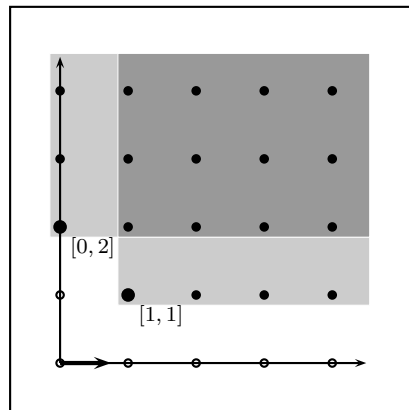


Abb. 2 Konstruktion eines formal korrekten Anfangswertproblems.

Zumindest in zwei-dimensionalen Beispielen kann man die richtigen Anfangsbedingungen leicht graphisch bestimmen (siehe Abbildung 2). Dazu identifiziert man eine Ableitung $\partial^{k+\ell} u / \partial x^k \partial t^\ell$ (bzw. den entsprechenden Taylor-Koeffizienten) mit dem Gitterpunkt $[k, \ell] \in \mathbb{N}_0^2$ und trägt die zu den Leitern gehörende Punkte ein (die beiden dicken Punkte). Alle Punkte in dem grau schattierten Bereich gehören nun zu Ableitungen, die wir durch Differenzieren der Leitern erhalten können (man spricht auch von *Hauptableitungen*). Die Ableitungen in dem dunkler schattierten Bereich können dabei auf zwei verschiedene Arten berechnet werden. Die Tatsache, daß unser System keine versteckten Integrabilitätsbedingungen enthält, garantiert, daß jede Art zu demselben Ergebnis führt. Das Komplement des grauen Bereichs enthält alle Ableitungen, deren Werte durch die Anfangsbedingungen spezifiziert werden müssen (die sogenannten *parametrischen Ableitungen*, da ihre Werte den formalen Lösungsraum parametrisieren). Offensichtlich zerfällt dieses Komplement in

einen einzelnen Punkt, $[0, 1]$, sowie der positiven x -Achse mit Startpunkt $[0, 0]$. Diese beiden Punkte definieren unsere Anfangsbedingungen, die ja gerade die entsprechenden Ableitungen u_t und u enthalten. Da $[0, 1]$ ein isolierter Punkt ist, müssen wir direkt die einzelne Ableitung $u_t(0, 0)$ vorgeben. $[0, 0]$ ist dagegen der Startpunkt eines Strahls in x -Richtung und dementsprechend muß die Funktion $u(x, 0)$ vorgegeben werden, um die unendlich vielen Punkte auf dem Strahl zu spezifizieren.

Diese Vorgehensweise läßt sich auch leicht auf höhere Dimensionen ausdehnen. Aus algebraischer Sicht kann man Elemente des Gitters \mathbb{N}_0^n mit Monomen identifizieren, indem man dem Gitterpunkt $[k_1, \dots, k_n]$ das Monom $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ zuordnet. Der graue Bereich in Abbildung 2 entspricht dann dem von t^2 und xt erzeugten monomialen Ideal \mathcal{I} . Der entscheidende Schritt unserer Konstruktion besteht aus einer disjunkten Zerlegung des Komplements des Ideals \mathcal{I} in „Kegel“ von im allgemeinen unterschiedlicher Dimension. Jeder Kegel definiert dann eine Anfangsbedingung: die Ableitung wird durch die Kegelspitze festgelegt und die „freien Richtungen“ im Kegel geben an, als Funktion welcher Variablen wir diese Ableitung vorgeben müssen.

Man beachte, daß solche Zerlegungen in der Regel nicht eindeutig sind und man daher für dasselbe System partieller Differentialgleichungen verschiedene formal korrekte Anfangswertprobleme angeben kann. In manchen Fällen (z.B. bei einem System in Cauchy-Kovalevskaya-Form) gibt es eine natürlich ausgezeichnete Zerlegung, da andere Zerlegungen nur über die künstliche Einführung von Redundanzen gewonnen werden können. Bei stärker überbestimmten Systemen kann es aber mehrere gleich gute Zerlegungen geben.

Wenn wir mit $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ den Ring der Polynome in den Variablen x_1, \dots, x_n bezeichnen, dann induzieren die den Punkten im Komplement entsprechenden Monomen eine Basis des Faktorrings \mathcal{P}/\mathcal{I} als reellen Vektorraums. Eine Zerlegung des Komplements in disjunkte Kegel wie oben diskutiert wird in der Algebra *Stanley-Zerlegung* genannt und stellt eine wichtige kombinatorische Operation dar (siehe z.B. [34] und Referenzen darin). Im Zusammenhang mit der Konstruktion formal korrekter Anfangswertprobleme tauchten solche Zerlegungen aber schon viel früher in der Janet-Riquier-Theorie allgemeiner Systeme von Differentialgleichungen auf [14, 26] (siehe [22] für eine moderne algorithmische Darstellung dieser Zerlegungen im Rahmen der Janet-Riquier-Theorie). Durch eine Kombination von Gröbner-Basen (einem der wichtigsten algorithmischen Werkzeugen in der Algebra) mit der Janet-Riquier-Theorie wird man zu involutiven Basen geführt [6, 31] und erhält dann auch automatisch zumindest für lineare Systeme partieller Differentialgleichungen effektive Vervollständigungsverfahren, die wir aber hier nicht diskutieren können.

Die Verallgemeinerung auf Systeme mit mehreren abhängigen Variablen stellt kein Problem dar. Anstelle eines Ideals $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ analysiert man jetzt einen Untermodul \mathcal{U} des freien Moduls \mathcal{P}^m , wobei m weiterhin die Anzahl abhängiger Variablen angibt. Wieder betrachtet man nur die Leiterterme (hierzu braucht man natürlich eine konkrete Vorschrift zu deren Bestimmung, also eine Rangordnung für Ableitungen) und wendet auf alle Terme, die zu derselben abhängigen Variablen gehören, obige Vorgehensweise an.

Beispiel 7 Ein Grund dafür, daß die Vervollständigung von Systemen partieller Differentialgleichungen so viel komplizierter ist als die gewöhnlicher Systeme, liegt darin, daß die Integrierbarkeitsbedingungen im partiellen Fall von höherer Ordnung als das Ausgangssystem sein können (ein bis heute ungelöstes theoretisches Problem ist es, a priori eine obere Schranke für die maximale Ordnung der Integrierbarkeitsbedingungen eines Systems anzugeben). Das folgende Beispiel eines linearen Systems zweiter Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x, y, z)$ geht wohl auf Janet zurück:

$$u_{zz} + yu_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0. \quad (11)$$

Wenn wir hier die erste Gleichung zweimal nach y ableiten und zweifache Ableitungen der zweiten Gleichung nach x bzw. nach z davon abziehen, so erhalten wir die Integrabilitätsbedingung $u_{xxy} = 0$, also eine Gleichung dritter Ordnung. Weitere Überkreuzableitungen führen sogar noch zu einer zusätzlichen Integrabilitätsbedingung vierter Ordnung, nämlich der Gleichung $u_{xxxx} = 0$.

In diesem Fall erweist sich die Überbestimmtheit des Systems als so stark, daß es nur einen endlich-dimensionalen Lösungsraum gibt. Wir dürfen nämlich nur die Werte der folgenden 12 Ableitungen an dem Punkt $(0, 0, 0)$ vorgeben: $u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}, u_{xxx}, u_{xxz}, u_{xyz}, u_{xxxz}$. Dies sind wieder die einzigen Ableitungen, die man nicht durch Differenzieren der „Leitterme“ u_{yy}, u_{zz}, u_{xxy} und u_{xxx} erhalten kann (das zugehörige monomiale Ideal ist also null-dimensional). Bei diesem System ist es daher nicht möglich, daß eine frei wählbare Funktion zu den Anfangsdaten gehört. In der Tat läßt sich bei diesem Beispiel nach dem Hinzufügen der Integrabilitätsbedingungen leicht die allgemeine Lösung berechnen:

$$u(x, y, z) = a_1 x^3 z - a_2 x y z^2 + a_3 x^3 + a_2 x^2 z + a_4 x y z - 3a_1 y z^2 + a_5 x^2 + a_6 x y + a_7 x z + a_8 y z + a_9 x + a_{10} y + a_{11} z + a_{12}. \quad (12)$$

6 Geometrische Modellierung von Differentialgleichungen

Die Beispiele der letzten Abschnitte zeigten, daß es für viele Fragen wichtig ist, alle versteckten Integrabilitätsbedingungen zu einem gegebenen System von Differentialgleichungen explizit zu konstruieren. Wie wir gesehen haben, stellt dieser Vervollständigungsprozeß jedoch insbesondere für *partielle* Differentialgleichungen eine nicht triviale Aufgabe dar.

Eine systematische und mathematisch befriedigende Lösung dieses Problems erfordert eine Kombination geometrischer und algebraischer Techniken. In diesem Abschnitt wenden wir uns zunächst der geometrischen Seite zu. Schon bei der Behandlung polynomialer Gleichungen hat sich eine geometrische Sichtweise als äußerst fruchtbar erwiesen; die Algebraische Geometrie gehört heute zu den größten Teilgebieten der Mathematik. In einer gewissen Analogie zur dortigen Vorgehensweise besteht unser erstes Ziel darin, jedem System von Differentialgleichungen ein geometrisches Objekt – eine Fläche in einem geeigneten Raum – zuzuordnen. Eine solche geometrische Modellierung von Differentialgleichungen besitzt viele Vorteile; vor allem ist sie wesentlich anschaulicher als eine rein rechnerische Behandlung. Außerdem sollten bei den meisten Problemen aus Anwendungen die Ergebnisse unabhängig von den verwendeten Koordinaten sein; dies ist bei einer intrinsischen geometrischen Formulierung automatisch gewährleistet.

Bei der Suche nach einer solchen geometrischen Modellierung stoßen wir auf folgendes Problem. Bei einer algebraischen Gleichung für n Variablen x_1, \dots, x_n ist jede Lösung einfach ein n -Tupel von Zahlen, d.h. ein Punkt in dem affinen Raum \mathbb{k}^n , wenn wir über dem Körper \mathbb{k} (z.B. den reellen Zahlen \mathbb{R} oder den komplexen Zahlen \mathbb{C}) arbeiten. Damit ist uns natürlich ein endlich-dimensionaler Raum, eben der \mathbb{k}^n , vorgegeben, in dem die Menge aller Lösungen eine Fläche bildet. Eine Lösung einer Differentialgleichung ist ein wesentlich komplizierteres Objekt, nämlich eine Funktion. Selbst wenn wir uns im folgenden stets auf glatte, d.h. unendlich oft differenzierbare, Funktionen beschränken, so bilden diese immer noch einen unendlich-dimensionalen Raum und einfach darin die Menge aller Lösungen zu betrachten führt zu keiner nützlichen geometrischen Modellierung.

Um wieder zu einem endlich-dimensionalen Raum zu gelangen, benutzen wir den bekannten *Satz von Taylor*. Wenn $\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x})$ eine glatte Funktion von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist⁸ (d.h., wenn in der Sprache von oben n unabhängige und m abhängige Variablen vorliegen), dann läßt sich für eine vorgegebene Entwicklungsordnung $q \in \mathbb{N}$ jede Komponente u_α von \mathbf{u} in einer Umgebung eines beliebigen, aber fest gewählten Punktes $\hat{\mathbf{x}}$ schreiben als

$$u_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq |\boldsymbol{\mu}| \leq q} \frac{u_{\alpha, \boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}!} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^{\boldsymbol{\mu}} + R_\alpha^{(q)}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}). \quad (13)$$

Dabei ergeben sich die Taylor-Koeffizienten $u_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}$ bekanntlich aus den Ableitungen der Funktion u_α im Entwicklungspunkt $\hat{\mathbf{x}}$,

$$u_{\alpha, \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} u_\alpha}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (14)$$

und das Restglied besitzt in der Lagrange-Darstellung die Form

$$R_\alpha^{(q)}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q+1} \frac{\partial^{q+1} u_\alpha}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}}(\hat{\mathbf{x}} + \theta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})) \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^{\boldsymbol{\mu}}}{\boldsymbol{\mu}!} \quad (15)$$

für einen Wert $\theta \in [0, 1[$.

Hierbei haben wir zur Vereinfachung durchgehend die übliche Multiindexnotation der Analysis benutzt. Für jeden Multiindex $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]$ bezeichnet $|\boldsymbol{\mu}| = \mu_1 + \dots + \mu_n$ seine Länge und es gilt $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}} = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$, $\boldsymbol{\mu}! = \mu_1! \dots \mu_n!$ sowie

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} u}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}}. \quad (16)$$

Da wir nur vorausgesetzt haben, daß die Funktion \mathbf{u} glatt ist, können wir keinerlei Aussagen über die Konvergenz der zugehörigen Taylor-Reihe machen. Diese Reihe interessiert uns aber auch nicht, da wir die Entwicklung (13) stets nur für eine *endliche* Ordnung q betrachten werden. Wir führen nämlich den q -*Jet*⁹ $[\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}$ der Funktion \mathbf{u} ein als die Menge aller glatten Funktionen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, die im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ bis zur Ordnung q dieselben Taylor-Koeffizienten wie \mathbf{u} besitzen. Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Menge eine Äquivalenzklasse für eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ darstellt. Die Aussage $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(0)}$ bedeutet also einfach, daß die beiden Funktionen \mathbf{u} und \mathbf{v} im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ denselben Funktionswert annehmen bzw. in einer mehr geometrischen Ausdrucksweise daß ihre Graphen sich im Punkt $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}))$ schneiden. Wenn sogar gilt $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}$, dann besitzen auch die ersten Ableitungen der beiden Funktionen in $\hat{\mathbf{x}}$ dieselben Werte und ihre Graphen berühren sich in $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}))$ (d.h. die Tangentialebenen stimmen ebenfalls überein). Allgemeiner sagt man, daß die Graphen in $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}))$ einen Kontakt der Ordnung q haben, wenn gilt $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}$.

⁸ Tatsächlich werden wir im folgenden immer nur lokale Eigenschaften in der Umgebung eines Punktes $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ untersuchen und daher reicht es, wenn unsere Funktionen in einer offenen Umgebung \mathcal{U} dieses Punktes definiert sind. Um aber die Notation nicht übermäßig aufzublähen, werden wir darauf verzichten, solche Umgebungen explizit anzugeben, und immer eine globale Schreibweise benutzen. Damit sind aber keine globalen Aussagen verbunden. Insbesondere wenn es sich bei den Funktionen um Lösungen einer Differentialgleichung handelt, werden diese häufig nur lokal definiert sein.

⁹ Die Bezeichnung „Jet“ geht auf Ehresmann [3,4] zurück, der als erster Jetbündel formal einführt als Hilfsmittel zum Studium von Zusammenhängen auf gefaserten Mannigfaltigkeiten (ein globaler Schnitt des ersten Jetbündel über einer gefaserten Mannigfaltigkeit ist äquivalent zu einem Zusammenhang auf dieser Mannigfaltigkeit). Implizit wurde der Jetformalismus aber schon lange vorher in der geometrischen Theorie der Differentialgleichungen benutzt.

Definition 8 Das *Jetbündel der Ordnung* $q \in \mathbb{N}$, geschrieben $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ist die Menge aller q -Jets von glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Vereinfacht ausgedrückt ist das Jetbündel $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ also nichts anderes als die Menge aller Taylor-Polynome der Ordnung q . Aus dieser Beobachtung folgt auch sofort, daß wir es mit einem endlich-dimensionalen Raum zu tun haben. Elementare Kombinatorik ergibt, daß eine Funktion von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m genau $m \binom{n+r-1}{r}$ Ableitungen der Ordnung r besitzt. Wenn wir dieses Resultat von 0 bis q aufaddieren, erhalten wir mit einer bekannten Identität für Binomialkoeffizienten

$$\dim J_q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = n + m \binom{n+q}{q} \quad (17)$$

(um einen q -Jet $[\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}$ vollständig zu beschreiben, müssen wir auch den Entwicklungspunkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ angeben und erhalten daher in (17) einen zusätzlichen Summanden n).

Scheinbar ist unsere Definition des Jetbündels abhängig von den gewählten Koordinaten, da wir in verschiedenen Koordinatensystemen auch verschiedene Taylor-Koeffizienten erhalten. Für uns sind aber nicht die absoluten Werte dieser Koeffizienten entscheidend, sondern nur die Frage, wann zwei Funktionen dieselben Koeffizienten besitzen. Man überzeugt sich leicht davon, daß diese Eigenschaft und damit auch die Definition eines q -Jets unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem ist. Somit besitzt $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit.

Ein lokales Koordinatensystem ist gegeben durch die Koordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ des Entwicklungspunkts \hat{x} sowie die Werte der Koeffizienten $u_{\alpha, \mu}$ mit $|\mu| \leq q$. Wir benutzen zur Reduzierung der Indexflut folgende Notationen: $\mathbf{u}_{(r)}$ bezeichnet alle Jetvariablen $u_{\alpha, \mu}$ einer festen Ordnung r (d.h. mit $|\mu| = r$); $\mathbf{u}^{(r)}$ steht hingegen für alle Jetvariablen *bis* zur Ordnung r (d.h. mit $|\mu| \leq r$). Lokale Koordinaten auf $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sind also $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)})$.

Die Jetbündel unterschiedlicher Ordnung bilden eine natürliche Hierarchie: für $q > r$ existiert eine kanonische Projektion $\pi_r^q : J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow J_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definiert durch $\pi_r^q([\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}) = [\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(r)}$. Anschaulich gesprochen, vergessen wir die Taylor-Koeffizienten, deren Ordnung größer als r ist. Wenn wir wirklich alle Taylor-Koeffizienten vergessen, erhalten wir noch die Projektion $\pi^q : J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\pi^q([\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}) = \hat{\mathbf{x}}$.

Wir haben hier die einfachste Definition des Jetbündels angegeben. Es gibt eine Vielzahl algebraischer und geometrischer Zugänge zu diesem wichtigen Konzept, auf die wir hier nicht eingehen können. Allgemeiner betrachtet man Jets von Abbildungen $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten \mathcal{X} und \mathcal{U} (oder noch etwas allgemeiner von Schnitten einer gefaserten Mannigfaltigkeit $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$). Wir müssen hier auf die Literatur [7, 23, 27, 32] und die dort aufgeführten Referenzen verweisen.

Als nächsten Schritt wollen wir nun eine geometrische Definition von Differentialgleichungen und ihren Lösungen angeben. Dazu bemerken wir zuerst, daß wir jeder glatten Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ihre q -te *Prolongation* zuordnen können, nämlich die Funktion $j_q \mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definiert durch $j_q \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}]_{\hat{\mathbf{x}}}^{(q)}$.

Definition 9 Eine *Differentialgleichung* der Ordnung q ist eine Fläche (Untermannigfaltigkeit) $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Eine glatte Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist eine *Lösung* der Differentialgleichung \mathcal{R}_q , wenn das Bild der Prolongation $j_q \mathbf{u}$ vollständig in \mathcal{R}_q liegt.

Man beachte, daß in diesem geometrischen Zugang nicht zwischen einer skalaren Gleichung und einem System unterschieden wird. Daher werden wir von jetzt an immer einfach

von einer Differentialgleichung reden, auch wenn es sich meistens um ein System handeln wird. Der Zusammenhang zwischen Definition 9 und dem herkömmlichen Bild ist sehr einfach. Unsere Notation legt ja schon nahe, daß wir gemäß (14) Jetvariablen mit Ableitungen identifizieren. Wenn wir also ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung $F(x, u, u_x) = 0$ vorliegen haben, dann interpretieren wir es als ein System *algebraischer* Gleichungen in $J_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und die zugehörigen Nullstellen bilden die Fläche \mathcal{R}_1 . Das Einsetzen der Prolongation $j_1 u$ einer Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in diese algebraischen Gleichungen ist offensichtlich äquivalent dazu, daß die Funktion und ihre Ableitungen in die ursprünglichen Differentialgleichungen eingesetzt werden.

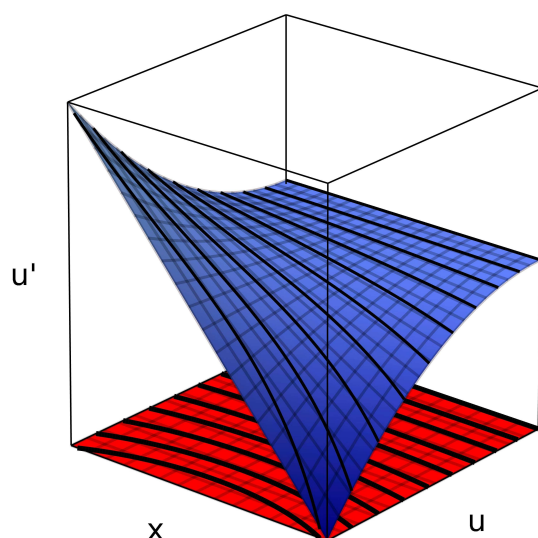


Abb. 3 Eine einfache Differentialgleichung mit einigen Lösungen

Abbildung 3 zeigt die Fläche \mathcal{R}_1 für eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung: $u' = -xu^2$. Die Kurven in der x - u -Ebene (zur besseren Sichtbarkeit an den unteren Rand der Abbildung verschoben) sind die Graphen von Lösungen (wie man leicht ausrechnet, sind diese durch die Schar $u(x) = 2c/(2 + cx^2)$ mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegeben); die entsprechenden Kurven auf \mathcal{R}_1 stellen die Graphen der ersten Prolongationen dieser Lösungen dar. Eine *normale*, global definierte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung \mathcal{R}_1 induziert immer einen Zusammenhang und man kann die Lösungen als die zugehörigen Integralmannigfaltigkeiten auffassen, die eine Blätterung der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definieren, wie man der Abbildung gut entnehmen kann.

Anmerkung 10 Wir haben am Anfang dieses Abschnittes von einer gewissen Analogie zur Algebraischen Geometrie gesprochen. Wir sollten daher noch einmal den wesentlichen Unterschied zu der dortigen Vorgehensweise betonen. Wenn wir ein System von Differentialgleichungen durch eine Fläche $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ beschreiben, dann ist ein Punkt

$[\mathbf{u}]_{\mathbf{x}}^{(q)} \in \mathcal{R}_q$ keine Lösung des gegebenen Systems. Ein solcher Punkt entspricht ja einer ganzen Äquivalenzklasse von Funktionen und selbst wenn wir eine dieser Funktionen in unser System einsetzen, dann können wir nur sagen, daß sie *bis zur Ordnung* q das System erfüllt. Im allgemeinen muß die Äquivalenzklasse überhaupt keine Lösung des Systems enthalten!¹⁰ Dies ist der Preis, den wir dafür zahlen müssen, daß wir mit endlich-dimensionalen Räumen arbeiten. Umgekehrt gilt natürlich für jede Lösung \mathbf{u} des Systems und für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, an dem \mathbf{u} definiert ist, daß der q -Jet $[\mathbf{u}]_{\mathbf{x}}^{(q)}$ auf \mathcal{R}_q liegt.

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung \mathcal{R}_2 definiert durch $u'' = 0$. Ein 2-Jet $[u]_{\hat{x}}^{(2)}$ liegt genau dann in \mathcal{R}_2 , wenn $u''(\hat{x}) = 0$, d.h. wenn die zweite Ableitung der Funktion u im Punkt \hat{x} verschwindet. So ist etwa für die Funktion $v(x) = x^3$ der 2-Jet $[v]_0^{(2)}$ in \mathcal{R}_2 enthalten, obwohl sie natürlich keine Lösung der Differentialgleichung ist. In der Tat gilt hier für jeden Punkt $\hat{x} \neq 0$, daß $[v]_{\hat{x}}^{(2)}$ nicht in \mathcal{R}_2 liegt. Der 2-Jet $[v]_0^{(2)}$ enthält aber auch die Funktion $\tilde{v}(x) = 0$, die offensichtlich eine Lösung ist. Da es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt, überlegt man sich leicht, daß in jedem 2-Jet $[w]_{\hat{x}}^{(2)} \in \mathcal{R}_2$ genau eine Lösung der Gleichung enthalten ist, nämlich die eindeutige Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(\hat{x}) = w(\hat{x})$ und $u'(\hat{x}) = w'(\hat{x})$.

Wir erwähnten oben bereits die natürliche Hierarchie der Jetbündel $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ für verschiedene Ordnungen $q \in \mathbb{N}$. Sie erlaubt uns einen rein geometrischen Zugang zu Integrabilitätsbedingung ohne auf konkrete Rechenvorschriften zurückgreifen zu müssen. Grundlage sind zwei natürliche Operationen mit einer Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Ordnung q : Prolongation und Projektion. Erstere erhöht die Ordnung; letztere erniedrigt sie.

Eine intrinsische Definition der *Prolongation* ist etwas verwickelt, daher begnügen wir uns hier mit einem rechnerischen Zugang. Wenn eine Funktion $u(x, y)$ der Differentialgleichung $u_{xy} = 0$ genügt, dann erfüllt sie natürlich auch die Gleichungen $u_{xxy} = 0$ und $u_{xyy} = 0$, die durch Differentiation nach den unabhängigen Variablen x und y entstehen. Wenn nun $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch Gleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ beschrieben wird, so entsteht eine neue Differentialgleichung $\mathcal{R}_{q+1} \subseteq J_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Ordnung $q+1$, wenn wir zu diesen Gleichungen alle Gleichungen hinzufügen, die wir durch Ableiten nach einer unabhängigen Variablen erhalten. Natürlich können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen und so Gleichungen $\mathcal{R}_{q+r} \subseteq J_{q+r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ immer höherer Ordnung $q+r \in \mathbb{N}$ produzieren. Im Sinne der Definition eines Jets als Taylor-Polynom bedeutet dies, daß wir Approximationen immer höherer Ordnung betrachten.¹¹

Das Differenzieren einer Differentialgleichung $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = 0$ nach einer unabhängigen Variablen x_i wird durch die sogenannte *formale Ableitung* beschrieben,¹²

$$D_i F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)}) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=0}^q u_{\alpha, \mu+1_i} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha, \mu}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}), \quad (18)$$

¹⁰ Wir werden später sehen, daß – unter gewissen Regularitätsannahmen – bei einem vervollständigten System (also für ein System ohne versteckte Integrabilitätsbedingungen) jede Äquivalenzklasse $[\mathbf{u}]_{\mathbf{x}}^{(q)} \in \mathcal{R}_q$ mindestens eine Lösung enthält (bei partiellen Differentialgleichungen in der Regel sogar unendlich viele).

¹¹ Der Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ führt zu dem Jetbündel $J_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ unendlicher Ordnung und der unendlichen Prolongation \mathcal{R}_∞ einer Differentialgleichung \mathcal{R}_q . Ein Punkt auf letzterer kann wie in der Algebraischen Geometrie als (formale) Lösung betrachtet werden. Wir verzichten hier auf diesen (nicht ganz trivialen) Grenzübergang, der für das praktische Rechnen mit Differentialgleichungen auch nicht relevant ist, und verweisen stattdessen auf die Literatur [16, 35].

¹² $\mu + 1_i$ bezeichnet den Multiindex, der entsteht, wenn man den i ten Eintrag von μ um Eins erhöht.

die einfach die Kettenregel im Jetbündelformalismus kodiert. In der Tat repräsentiert die rechte Seite von (18) genau den Ausdruck, den man erhält, wenn man in F für $\mathbf{u}^{(q)}$ eine Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und ihre Ableitungen einsetzt und dann gemäß der Kettenregel nach x_i differenziert. Man beachte, daß die formale Ableitung $D_i F$ immer eine *lineare* Funktion der Ableitungen $\mathbf{u}_{(q+1)}$ höchster Ordnung ist, da diese nur als Koeffizienten auftreten, wenn in der Summe Multiindizes mit $|\boldsymbol{\mu}| = q$ behandelt werden.

Die *Projektion* läßt sich geometrisch elementar beschreiben, ist aber rechnerisch oft nichttrivial auszuführen. Für eine Ordnung $0 \leq r < q$ können wir die Differentialgleichung¹³ $\mathcal{R}_r^{(q-r)} = \pi_r^q(\mathcal{R}_q) \subseteq J_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ betrachten, die wir erhalten, wenn wir die kanonische Projektion $\pi_r^q : J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow J_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ auf die Teilmenge $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ einschränken. Rechnerisch entspricht dies einem Eliminationsprozeß: wir müssen aus den Gleichungen, die \mathcal{R}_q beschreiben, alle Jetvariablen einer Ordnung größer als r eliminieren; die übrigbleibenden Gleichungen beschreiben $\mathcal{R}_r^{(q-r)}$. Praktisch läßt sich dies nur für polynomiale Gleichungen effektiv durchführen mit Hilfe von Gröbner-Basen. Zum Glück benötigt man häufig nur die Projektion einer Gleichung, die man zuvor durch eine Prolongation erzeugt hat. In diesem Fall reicht sogar etwas Lineare Algebra aus.

Beispiel 11 Auf den ersten Blick scheinen Prolongation und Projektion zu einander inverse Operationen zu sein; dem ist aber im allgemeinen nicht so und eine Erklärung dieses Effekts führt auch automatisch zu dem geometrischen Bild von Integrabilitätsbedingungen. Betrachten wir als einfaches Beispiel die Differentialgleichung $\mathcal{R}_1 \subset J_1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$, die durch das lineare System

$$u_z + yu_x = 0, \quad u_y = 0 \quad (19)$$

beschrieben wird. Um die erste Prolongation $\mathcal{R}_2 \subset J_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$ zu berechnen, müssen wir jede Gleichung nach allen unabhängigen Variablen ableiten und erhalten das System

$$u_z + yu_x = 0, \quad u_y = 0, \quad (20)$$

$$u_{xz} + yu_{xx} = 0, \quad u_{yz} + yu_{xy} + u_x = 0, \quad u_{zz} + yu_{xz} = 0, \quad (21)$$

$$u_{xy} = 0, \quad u_{yy} = 0, \quad u_{yz} = 0. \quad (22)$$

Man sieht leicht, daß es ausgehend von der mittleren Gleichung der zweiten Zeile eine Linearkombination der Gleichungen zweiter Ordnung gibt, bei der alle Ableitungen zweiter Ordnung sich wegheben und eine Gleichung erster Ordnung entsteht (es war hier also eine Integrabilitätsbedingung versteckt, nämlich $u_x = 0$). Wenn wir nun \mathcal{R}_2 zurückprojizieren nach $J_1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1)$, erhalten wir daher anstelle der Ausgangsgleichung \mathcal{R}_1 die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{R}_1^{(1)} \subset \mathcal{R}_1$ beschrieben durch die *drei* Gleichungen

$$u_z + yu_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_x = 0. \quad (23)$$

Häufig vereinfacht das Hinzufügen der versteckten Integrabilitätsbedingungen auch die explizite Integration des Systems: bei \mathcal{R}_1 erkennt man noch nicht unbedingt auf den ersten Blick den Lösungsraum; $\mathcal{R}_1^{(1)}$ ist aber offensichtlich äquivalent zu $u_x = u_y = u_z = 0$ und daher besteht der Lösungsraum beider Gleichungen nur aus den konstanten Funktionen.

¹³ Die Notation $\mathcal{R}_r^{(q-r)}$ ist so zu interpretieren: der untere Index r gibt an, daß es sich um eine Gleichung der Ordnung r handelt; der obere Index besagt, daß diese Gleichung durch eine Projektion über $q - r$ Ordnungen gewonnen wurde.

In obigem Beispiel entstand die Integrabilitätsbedingung durch eine (verallgemeinerte) Überkreuzableitung. Aus geometrischer Sicht ist aber der konkrete rechnerische Mechanismus zur Erzeugung der neuen Gleichung nicht relevant. Versteckte Integrabilitätsbedingungen gibt es genau dann, wenn für irgendeine Prolongationsordnung $r \geq 0$ gilt, daß eine weitere Prolongation mit nachfolgender Projektion zu einer echten Untermannigfaltigkeit führt: $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)} \subsetneq \mathcal{R}_{q+r}$. Diese Beobachtung motiviert folgende Begriffsbildung.

Definition 12 Die Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ heißt *formal integrabel*, wenn für alle ganzen Zahlen $r \geq 0$ gilt $\mathcal{R}_{q+r}^{(1)} = \mathcal{R}_{q+r}$.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Bezeichnung „formal integrabel“ daher rührt, daß für eine solche Gleichung formale Potenzreihenlösungen systematisch Ordnung für Ordnung konstruiert werden können. Für den Moment wollen wir nur festhalten, daß es bei einem formal integrablen System keine versteckten Integrabilitätsbedingungen mehr gibt. Das Ziel einer Vervollständigung ist es also immer, eine äquivalente, formal integrable Gleichung zu produzieren. Dabei stellt sich das Problem, daß Definition 12 unendlich viele Bedingungen enthält, und es daher unklar ist, wie wir effektiv feststellen sollen, daß eine gegebene Gleichung formal integrabel ist. Tatsächlich ist es so, daß praktisch alle Vervollständigungsverfahren *mehr* als nur ein formal integrables System liefern; die verschiedenen Zugänge unterscheiden sich dabei in der Regel in diesem „Mehr.“ In der formalen Theorie kommt man hier zu dem stärkeren und eher algebraischen Begriff einer *involutiven* Gleichung, für den wir aber auf die Literatur [32] verweisen müssen. Für involutive Gleichungen existieren effektiv verifizierbare Kriterien. Der nachfolgende Satz garantiert, daß eine Vervollständigung (unter gewissen Regularitätsannahmen) immer möglich ist.

Theorem 13 (Cartan-Kuranishi) Sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine beliebige Differentialgleichung. Dann existieren zwei ganze Zahlen $r, s \geq 0$, so daß entweder $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ involutiv (und damit insbesondere auch formal integrabel) ist oder $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)} = \emptyset$ (in diesem Fall ist \mathcal{R}_q inkonsistent, d.h. die Gleichung besitzt keine Lösungen).

7 Formale Potenzreihenlösungen

Nur für wenige Differentialgleichungen gelingt es, die Lösungen in geschlossener Form anzugeben. Fast immer ist aber die Berechnung formaler Potenzreihenlösungen (bis zu einer vorgegebenen Ordnung) möglich. Wir wollen nun diese Konstruktion für allgemeine Systeme von Differentialgleichungen diskutieren, um die Bedeutung einiger der im letzten Abschnitt diskutierten Fragen aufzuzeigen. Im Prinzip existieren viele verschiedene Möglichkeiten solche Lösungen zu bestimmen; uns geht es hier um einen *systematischen* Weg, der für möglichst viele Systeme die Reihen Ordnung für Ordnung konstruiert.

Im Folgenden sei uns eine Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \in J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Ordnung q gegeben, die durch Gleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ beschrieben wird. Wir wählen einen beliebigen Entwicklungspunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ und machen den üblichen Ansatz für eine formale Potenzreihenlösung um \hat{x} :

$$u_\alpha(x) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} a_{\alpha,\mu} \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\mu}{\mu!} \quad (24)$$

mit reellen Koeffizienten $a_{\alpha,\mu} \in \mathbb{R}$. Dabei benutzen wir weiterhin die Notationen $\mathbf{a}_{(r)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(r)}$, um alle Koeffizienten einer bzw. bis zu einer festen Ordnung zu bezeichnen.

Da wir weder Anfangs- noch Randbedingungen vorgegeben haben, dürfen wir keine eindeutige Lösung erwarten. Wir können aber Relationen zwischen den Koeffizienten $a_{\alpha,\mu}$ angeben. Dazu setzen wir unseren Ansatz in die Differentialgleichung ein und werten die entstehenden Gleichungen am Entwicklungspunkt \hat{x} aus. Man überzeugt sich leicht davon, daß wir dann folgende algebraische Gleichungen erhalten:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{a}^{(q)}) = \mathbf{0}. \quad (25)$$

Sie bilden ein im allgemeinen nichtlineares System für die Koeffizienten $\mathbf{a}^{(q)}$ bis zur Ordnung q (alle Koeffizienten höherer Ordnung fallen durch die Auswertung in \hat{x} heraus). Wir nehmen im Folgenden stets an, daß wir dieses System nach gewissen Koeffizienten auflösen können, die wir als *Hauptkoeffizienten* bezeichnen, da sie gerade denen in Abschnitt 5 eingeführten Hauptableitungen entsprechen. Die Gleichungen (25) erlauben uns dann, diese Hauptkoeffizienten durch die restlichen Koeffizienten bis zur Ordnung q , den *parametrischen Koeffizienten*, auszudrücken.

Als nächstes betrachten wir die erste Prolongation $\mathcal{R}_{q+1} \subseteq J_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; sie wird beschrieben durch die Ausgangsgleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$ sowie den formalen Ableitungen $D_i \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q+1)}) = \mathbf{0}$ für $1 \leq i \leq n$. Wieder setzen wir unseren Ansatz ein und werten am Entwicklungspunkt \hat{x} aus. Dann erhalten wir zunächst noch einmal die bereits behandelten Gleichungen (25) sowie als neue Gleichungen

$$D_i \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{a}^{(q+1)}) = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Bei der Einführung der formalen Ableitung (18) haben wir betont, daß diese linear in den Jetvariablen $\mathbf{u}_{(q+1)}$ höchster Ordnung ist. Wenn wir also annehmen, daß alle Relationen zwischen den Koeffizienten $\mathbf{a}^{(q)}$ bereits durch (25) erfaßt sind, dann dürfen wir (26) als ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $\mathbf{a}_{(q+1)}$ der Ordnung $q+1$ auffassen. Wieder können wir dieses System nach Hauptkoeffizienten auflösen und diese dann durch die verbleibenden parametrischen Koeffizienten ausdrücken.

Nun iterieren wir dieses Schema: im nächsten Schritt wird die zweite Prolongation $\mathcal{R}_{q+2} \subseteq J_{q+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ betrachtet und wir erhalten zusätzlich zu den bereits behandelten Gleichungen ein lineares Gleichungssystem,

$$D_i D_j \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{a}^{(q+2)}) = \mathbf{0}, \quad (27)$$

für die Koeffizienten $\mathbf{a}_{(q+2)}$ usw. Wir können so also Ordnung für Ordnung die Koeffizienten des Ansatzes (24) bestimmen. Dabei ergeben sich alle Koeffizienten einer höheren Ordnung als q durch das Lösen eines linearen Gleichungssystem; eine mögliche Nichtlinearität unserer Differentialgleichung schlägt sich nur in (25) nieder.

In einer konkreten Rechnung müssen wir bei einer endlichen Ordnung $q+r$ abrechnen. Da wir bei obiger Konstruktion einige Annahmen getroffen haben, die erst noch zu rechtfertigen sind, stellt sich nun die Frage, ob die so erhaltene Potenzreihe wenigstens bis zu dieser Ordnung eine gültige Approximation einer Lösung ist. Die Antwort lautet: dies ist nur dann sicher der Fall, wenn die Differentialgleichung \mathcal{R}_q formal integrierbar ist! Die Konstruktion von formalen Potenzreihenlösungen macht also erst dann Sinn, wenn ein formal integrierbares System vorliegt, da nur dann die Korrektheit des Ergebnis garantiert werden kann.

Beispiel 14 Wir betrachten erneut die Differentialgleichung \mathcal{R}_1 gegeben durch (19). Einsetzen unseres Reihenansatzes und Auswerten an dem Entwicklungspunkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ liefert für

die insgesamt vier Taylor-Koeffizienten nullter und erster Ordnung das homogene lineare Gleichungssystem

$$a_{[0,0,1]} + \hat{y}a_{[1,0,0]} = a_{[0,1,0]} = 0, \quad (28)$$

das offensichtlich einen zweidimensionalen Lösungsraum besitzt. Wenn wir nun bereits an dieser Stelle die Rechnung beenden, dann erhalten wir als vermeintliche lineare Näherung der Lösungen den Ausdruck

$$u(x, y, z) = a_{[0,0,0]} + a_{[1,0,0]}(x - \hat{x}) - \hat{y}a_{[1,0,0]}(z - \hat{z}) \quad (29)$$

mit den zwei parametrischen Koeffizienten $a_{[0,0,0]}$ und $a_{[1,0,0]}$. Aus Beispiel 11 wissen wir aber, daß die Gleichung \mathcal{R}_1 tatsächlich nur über konstante Lösungen verfügt; (29) stellt also nur für $a_{[1,0,0]} = 0$ eine korrekte Approximation der Lösung dar.

Die Ursache dieses Problems ist aus unserer Diskussion in Beispiel 11 sofort ersichtlich: es gibt eine versteckte Integrabilitätsbedingung erster Ordnung, die einerseits eine weitere Gleichung für die Taylor-Koeffizienten bis zur Ordnung eins liefert und andererseits erst dann sichtbar wird, wenn man die erste Prolongation unseres Systems betrachtet. Wenn wir nach dem oben erläuterten Schema weitergerechnet hätten, hätten wir die fehlende Bedingung im nächsten Schritt entdeckt. Es wäre dann nämlich nicht mehr möglich gewesen, (26) als ein lineares System nur für die Koeffizienten zweiter Ordnung zu betrachten. Durch Gauß-Eliminationen kann man in diesem Fall in (26) eine Gleichung erzeugen können, bei der links Null und rechts etwas von Null Verschiedenes (nämlich $a_{[0,1,0]}$) steht.

Sobald man formale Potenzreihenlösungen gefunden hat, stellt sich natürlich die Frage nach der Konvergenz der Reihen. Hier erhält man das folgende fundamentale Ergebnis, das bemerkenswerterweise keinerlei Strukturannahmen wie z.B. Hyperbolizität oder Elliptizität für die betrachtete Differentialgleichung \mathcal{R}_q benötigt.

Theorem 15 (Cartan-Kähler) *Sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine analytische involutive Differentialgleichung. Dann besitzt ein geeignet gewähltes formal korrektes Anfangswertproblem für die Differentialgleichung \mathcal{R}_q eine eindeutige analytische Lösung.*

Dieses Theorem stellt eine Verallgemeinerung des Cauchy-Kovalevskaya-Theorems von normalen Gleichungen auf beliebige involutive Gleichungen dar und wird durch eine Reduktion auf dieses bewiesen. Für den Beweis ist es wesentlich, daß man es wirklich mit einer involutiven und nicht nur mit einer formal integrierbaren Gleichung zu tun hat. Vereinfacht ausgedrückt, reicht formale Integrabilität nur aus, um die Existenz von Lösungen zu garantieren; Eindeutigkeitsaussagen erfordern Involutions der Gleichung. In der Formulierung von Theorem 15 haben wir das Anfangswertproblem nicht explizit angegeben. Dies ist relativ einfach möglich (z.B. mit den in Abschnitt 5 skizzierten Methoden). Wir verzichten hier auf die Details und verweisen hierfür sowie für eine genauere Diskussion von Beweis und Bedeutung von Theorem 15 auf [32, Sect. 9.4] und die dort angegebene Literatur.

8 Das Geometrische Symbol und das Hauptsymbol

Bisher haben wir rein geometrisch gearbeitet und dadurch ein recht anschauliches Bild von Integrabilitätsbedingungen und der Konstruktion von Potenzreihenlösungen gewonnen. In der praktischen Umsetzung dieser Ergebnisse ergeben sich aber Probleme. Zum einen sind wir unserem eigentlichen Ziel, ein Maß für die Größe des formalen Lösungsraums anzugeben, noch nicht wirklich näher gekommen. Zum anderen setzt unser Konstruktionsverfahren für Potenzreihenlösungen voraus, daß ein formal integrierbares System vorliegt. Wie schon

oben erwähnt, enthält Definition 12 aber unendlich viele Bedingungen und kann daher nicht effektiv überprüft werden. Hier kommen nun algebraische Techniken ins Spiel.

Die Möglichkeit, algebraische bzw. sogar polynomiale Strukturen einzuführen, beruht auf der natürlichen Hierarchie der Jetbündel verschiedener Ordnung, genauer gesagt auf den Eigenschaften der Projektion $\pi_{q-1}^q : J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow J_{q-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Der Einfachheit halber nehmen wir im Folgenden meistens an, daß $m = 1$ ist.¹⁴

Wir geben uns einen beliebigen aber festen Punkt $\hat{\rho} = [u]_{\hat{x}}^{(q-1)} \in J_{q-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vor und betrachten darüber die Faser $\mathcal{A} = (\pi_{q-1}^q)^{-1}(\hat{\rho}) \subset J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Punkte in \mathcal{A} dürfen wir mit Taylor-Polynomen vom Grad q identifizieren. Da zwei Punkte $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}$ über demselben Punkt $\hat{\rho}$ liegen, können sie sich nur in den Termen vom Grad q unterscheiden, denn alle Terme niedrigeren Grades sind durch das $\hat{\rho}$ entsprechende Taylor-Polynom festgelegt. Damit ist die Differenz $\rho_1 - \rho_2$ ein *homogenes* Polynom vom Grad q . Abstrakter ausgedrückt haben wir gezeigt, daß die Faser \mathcal{A} ein affiner Raum über dem Vektorraum \mathcal{P}_q ist; hierbei bezeichnet $\mathcal{P} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ den Polynomring in den Variablen x_1, \dots, x_n und \mathcal{P}_q die homogene Komponente vom Grad q .

Versteckt in der Jethierarchie liegt also eine natürliche polynomiale Struktur (was nicht sonderlich überrascht, da die Jetbündel über Taylor-Polynome definiert sind). Wenn wie üblich $T^*\mathbb{R}^n$ das Kotangentenbündel über \mathbb{R}^n , $T\mathbb{R}^m$ das Tangentialbündel über \mathbb{R}^m und S_q das q -fache symmetrische Produkt bedeutet, dann können wir diese Beobachtung in intrinsischer und globaler Sprache wie folgt formulieren.

Satz 16 *Das Jetbündel $J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist ein affines Bündel über $J_{q-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ modelliert auf das Vektorbündel $S_q(T^*\mathbb{R}^n) \otimes T\mathbb{R}^m$.*

In noch einmal einer anderen Sprache nimmt diese wichtige Strukturaussage folgende Form an. Wenn wir eine Koordinatentransformation $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $\mathbf{v} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ zu neuen unabhängigen und abhängigen Variablen vornehmen, so läßt sich das Transformationsverhalten der Ableitungen leicht mittels der Kettenregel bestimmen. Man erhält dabei für die Ableitungen $\mathbf{v}_{(q)}$ der Ordnung q ein bezüglich der Ableitungen niedrigerer Ordnung affines Transformationsgesetz $\mathbf{v}_{(q)} = A(\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}_{(q)} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q-1)})$, wobei A, \mathbf{b} für komplizierte Ausdrücke ihrer Argumente stehen.

Geometrisch bedeutet Satz 16, daß wir den Tangentialraum $T\mathcal{A}$ an die Fasern der Projektion π_{q-1}^q mit Elementen eines symmetrischen Produkts identifizieren können; man spricht auch von der *fundamentalen Identifikation*. In lokalen Koordinaten kann wiederum ein symmetrisches Produkt mit einem Polynomring identifiziert werden. Diese Beobachtung erlaubt uns, zwischen geometrischen Objekten (Tangentialvektoren) und algebraischen Objekten (homogenen Polynomen) hin und her zu wechseln. Wir bleiben aber zunächst noch auf der geometrischen Seite.

Sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine Differentialgleichung. Wenn wir in einem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ den Tangentialraum $T_\rho\mathcal{R}_q$ betrachten, dann zeichnet die Projektion $\pi_{q-1}^q : J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow J_{q-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die dazu vertikalen Vektoren aus: dies sind diejenigen Vektoren, die zusätzlich zu der Faser \mathcal{A} über $\hat{\rho} = \pi_{q-1}^q(\rho)$ tangential sind. Man überzeugt sich leicht davon, daß die vertikalen Vektoren einen Untervektorraum $(\mathcal{N}_q)_\rho \subseteq T_\rho\mathcal{R}_q$ bilden.

Definition 17 Das *geometrische Symbol* \mathcal{N}_q der Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist der zu der Projektion π_{q-1}^q vertikale Anteil des Tangentialraums $T\mathcal{R}_q$.

¹⁴ Dies stellt nicht einmal eine Einschränkung dar, da sich mittels eines auf Drach zurückgehenden Tricks jede Differentialgleichung mit m abhängigen Variablen in eine äquivalente Gleichung mit nur einer unbekanntem Funktion umschreiben läßt [32, App. A.3]. Allerdings erhöht sich dabei die Ordnung um eins.

In lokalen Koordinaten erhalten wir folgendes Bild des geometrischen Symbols. Ein Tangentialvektor $v \in T_\rho J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ an einem Punkt $\rho \in J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist von der Form

$$v = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=0}^q \dot{u}_{\alpha,\mu} \partial_{u_{\alpha,\mu}} \quad (30)$$

mit Koeffizienten $\dot{x}_i, \dot{u}_{\alpha,\mu} \in \mathbb{R}$. Der Tangentialvektor v steht genau dann vertikal zur Projektion π_{q-1}^q , wenn ausschließlich Koeffizienten $\dot{u}_{\alpha,\mu}$ mit $|\mu| = q$ von Null verschieden sind. Die Differentialgleichung \mathcal{R}_q sei nun beschrieben durch das System $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(q)}) = \mathbf{0}$. An einem Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ ist der Vektor v genau dann tangential zu \mathcal{R}_q , wenn seine Koeffizienten das lineare Gleichungssystem $d\mathbf{F}(v) = \mathbf{0}$ oder ausgeschrieben

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}(\rho) \dot{x}_i + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=0}^q \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_{\alpha,\mu}}(\rho) \dot{u}_{\alpha,\mu} = \mathbf{0} \quad (31)$$

erfüllen. Da nach obiger Definition das geometrische Symbol $(\mathcal{N}_q)_\rho$ im Punkt ρ der vertikale Anteil des Tangentialraums $T_\rho \mathcal{R}_q$ ist, besteht es also aus allen Tangentialvektoren $v = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \dot{u}_{\alpha,\mu} \partial_{u_{\alpha,\mu}}$, deren Koeffizienten die *Symbolgleichungen*

$$\sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\mu|=q} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_{\alpha,\mu}}(\rho) \dot{u}_{\alpha,\mu} = \mathbf{0} \quad (32)$$

lösen. Dieses homogene lineare Gleichungssystem besitzt eine Zeile für jede Differentialgleichung in unserem System und eine Spalte für jede Ableitung $u_{\alpha,\mu}$ der Ordnung q . Die zugehörige Matrix nennen wir *Symbolmatrix* $M_q(\rho)$. Im Prinzip müssen wir davon ausgehen, daß die Eigenschaften von (32) wesentlich von dem gewählten Punkt ρ abhängen. Wir werden dies im Folgenden jedoch vernachlässigen und daher meistens auf die explizite Angabe von ρ verzichten.

Man kann diese Konstruktion in Worten auch so beschreiben. Zunächst wird die im allgemeinen nichtlineare Differentialgleichung \mathcal{R}_q um einen Punkt $\rho \in \mathcal{R}_q$ linearisiert, dann wird von dem erhaltenen linearen System der sogenannte Hauptteil, also der Teil mit den Ableitungen höchster Ordnung, genommen und als ein lineares System algebraischer Gleichungen betrachtet. Die Koeffizientenmatrix dieses Systems ist dann die Symbolmatrix.

Beispiel 18 Wir betrachten erneut die planaren $U(1)$ -Yang-Mills-Gleichungen (8). Wenn wir die sechs Ableitungen zweiter Ordnung sortieren als $u_{tt}, v_{tt}, u_{xt}, v_{xt}, u_{xx}, v_{xx}$, dann erhalten wir als Symbolmatrix

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Also ist das geometrische Symbol \mathcal{N}_2 der reelle Vektorraum, der von den vier Tangentialvektoren $\partial_{u_{tt}}, \partial_{v_{tt}} + \partial_{u_{xt}}, \partial_{v_{xt}} + \partial_{u_{xx}}, \partial_{v_{xx}}$ erzeugt wird.

Da wir hier es bereits mit einem linearen System zu tun haben, ist keine Linearisierung nötig, und da das System keine Terme niedrigerer Ordnung enthält, stimmt es mit seinem Hauptteil überein. Wir haben hier also den seltenen Spezialfall vorliegen, daß die Symbolmatrix mit der Koeffizientenmatrix des Ausgangssystems übereinstimmt.

Anmerkung 19 Wenn wir die Differentialgleichung \mathcal{R}_q prolongieren, dann besitzt auch jede der erhaltenen Gleichungen \mathcal{R}_{q+r} ein Symbol \mathcal{N}_{q+r} ; offensichtlich wachsen die Dimensionen der zugehörigen Symbolmatrizen M_{q+r} dabei sehr schnell an. Für $r > 0$ sind uns diese Matrizen bereits bei der Konstruktion von Potenzreihenlösungen begegnet. Dort haben wir z.B. (26) als ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Taylor-Koeffizienten $\mathbf{a}_{(q+1)}$ der Ordnung $q+1$ interpretiert. Man sieht leicht, daß die Koeffizientenmatrix dieses Systems gerade die Symbolmatrix M_{q+1} ist (bei geeigneter Wahl des Punktes $\rho_1 \in \mathcal{R}_{q+1}$, an dem wir das Symbol \mathcal{N}_{q+1} bestimmen). Allgemein ergeben sich die Taylor-Koeffizienten $\mathbf{a}_{(q+r)}$ der Ordnung $q+r$ stets als Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix gerade die Symbolmatrix M_{q+r} ist.

Diese Beobachtung bedeutet aber, daß die (Vektorraum-)Dimension $\dim \mathcal{N}_{q+r}$ des prolongierten Symbols \mathcal{N}_{q+r} gerade die Anzahl der frei wählbaren Taylor-Koeffizienten der Ordnung $q+r$ angibt, und motiviert damit folgende Definition, in der wir einen bekannten Begriff aus der Kommutativen Algebra auf Differentialgleichungen übertragen.

Definition 20 Sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine formal integrable Differentialgleichung. Dann heißt $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $H(q+r) = \dim \mathcal{N}_{q+r}$ die *Hilbert-Funktion* von \mathcal{R}_q .

Wir betrachten damit nur die Ordnungen ab q . Da uns später vorwiegend das asymptotische Verhalten der Hilbert-Funktion für $r \rightarrow \infty$ interessieren wird, reicht dies für unsere Zwecke aus. Ein größeres Problem stellt die Frage nach der Berechnung der Hilbert-Funktion dar, da wir natürlich nicht für alle $r \gg 0$ das Symbol \mathcal{N}_{q+r} bestimmen können. Hier benötigen wir nun Methoden aus der Algebra.

Die Grundidee besteht darin, dem Symbol \mathcal{N}_q der Differentialgleichung \mathcal{R}_q einen Untermodul \mathcal{U} des freien Moduls \mathcal{P}^m über dem Polynomring $\mathcal{P} = \mathbb{R}[\chi_1, \dots, \chi_n]$ zuzuordnen,¹⁵ das gleichzeitig auch alle relevanten Informationen über die prolongierten Symbole \mathcal{N}_{q+r} enthält (im Fall $m = 1$ erhalten wir natürlich einfach ein Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$). Der Ausgangspunkt sind die Symbolgleichungen (32). Wenn wie üblich $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ die Standardbasis des \mathcal{P}^m bezeichnet, dann assoziieren wir zu der k ten Gleichung in (32) den Polynomvektor

$$\mathbf{f}_k = \sum_{\alpha=1}^m \left(\sum_{|\mu|=q} \frac{\partial F_k}{\partial u_{\alpha, \mu}}(\rho) \chi^\mu \right) \mathbf{e}_\alpha \quad (34)$$

(d.h. wir ersetzen die Variable $u_{\alpha, \mu}$ durch $\chi^\mu \mathbf{e}_\alpha$). Man kann zeigen, daß dies genau der oben angesprochenen fundamentalen Identifikation entspricht. Jede Komponente von \mathbf{f}_k ist ein homogenes Polynom vom Grad q und wir nennen den von diesen Polynomvektoren erzeugten Untermodul $\mathcal{U} = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p \rangle$ den *Symbolmodul* von \mathcal{R}_q . Man beachte, daß die Definition von \mathbf{f}_k in lokalen Koordinaten erfolgt und daß wir daher eigentlich noch die Abhängigkeit unserer Ergebnisse von den gewählten Koordinaten untersuchen müßten. Wir werden auf diesen Punkt aber nur kurz am Ende dieses Abschnitts eingehen.

Wie oben erklärt, wird die prolongierte Differentialgleichung \mathcal{R}_{q+1} definiert durch die Gleichungen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ und $D_i \mathbf{F} = \mathbf{0}$; für das prolongierte Symbol \mathcal{N}_{q+1} sind dabei nur letztere relevant. Man überzeugt sich leicht davon, daß die zu $D_i F_k = 0$ gehörende Symbolgleichung zu dem Polynomvektor $\chi_i \mathbf{f}_k$ führt. Entsprechendes gilt für höhere Prolongationen: alle Informationen über \mathcal{N}_{q+r} sind bereits in der homogenen Komponente \mathcal{U}_{q+r} enthalten. Damit können wir anstelle der unendlichen Folge von Vektorräumen $(\mathcal{N}_{q+r})_{r \geq 0}$

¹⁵ Wenn wir in unserer Differentialgleichung die unabhängigen Variablen mit x, y, z, \dots anstelle der indizierten Form x_1, \dots, x_n bezeichnen, dann schreiben wir für die Variablen von \mathcal{P} auch $\chi_x, \chi_y, \chi_z, \dots$

den endlich erzeugten polynomialen Modul $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}^m$ studieren.¹⁶ Dieser Modul enthält viele Informationen über die Differentialgleichung \mathcal{R}_q . Insbesondere stimmt seine Hilbert-Funktion (genauer: die des Faktormoduls $\mathcal{P}^m/\mathcal{U}$) mit der von \mathcal{R}_q überein. Die Berechnung der Hilbert-Funktion eines polynomialen Moduls stellt ein klassisches Problem der Kommutativen Algebra dar und kann z.B. mit Hilfe von Gröbner-Basen gelöst werden [8]. Als eine weitere Anwendung sollte noch erwähnt werden, daß die Syzygien von \mathcal{U} relevant sind für die explizite Konstruktion von Integrabilitätsbedingungen mittels verallgemeinerter Überkreuzableitungen (siehe [32, Remark 7.1.12]). Die Syzygientheorie polynomialer Moduln erlaubt dann auch die Formulierung eines effektiven Kriteriums für formale Integrabilität.

Wenn man die Polynomvektoren \mathbf{f}_k als Zeilen einer Matrix betrachtet, dann erhält man das *Hauptsymbol* $T_q[\chi]$ der Differentialgleichung \mathcal{R}_q . Bei einem System aus p Differentialgleichungen ist $T_q[\chi]$ eine $(p \times m)$ -Matrix: es gibt eine Zeile für jede Gleichung und eine Spalte für jede unbekannte Funktion u_α . Wenn wir das Hauptsymbol $T_q[\chi]$ mit der Symbolmatrix M_q vergleichen, dann entsteht ersteres aus letzterer durch eine Art „Kontraktion“: die Spalte, die in $T_q[\chi]$ zu dem Index α gehört, ist eine Linearkombination all der Spalten, die in M_q zu Variablen $u_{\alpha,\mu}$ gehören, mit χ^μ als Koeffizienten. Beide Symbole enthalten also dieselbe Information – nur unterschiedlich kodiert.

Beispiel 21 Wir setzen unsere in Beispiel 18 begonnene Betrachtung des Symbols der Yang-Mills-Gleichungen (8) fort. Das Hauptsymbol ist hier die (2×2) -Matrix

$$T_2[\chi_t, \chi_x] = \begin{pmatrix} -\chi_t \chi_x & \chi_t^2 \\ -\chi_x^2 & \chi_t \chi_x \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Man sieht hier sehr gut, wie die erste Spalte hier kodiert, welche Ableitungen zweiter Ordnung von u auftreten, und entsprechend die zweite Spalte für v .

Entscheidend für die spätere Klassifikation der Yang-Mills-Gleichungen als unterbestimmt ist die Beobachtung, daß die Zeilen dieser Matrix linear abhängig sind und damit das Einsetzen beliebiger Werte für χ_t und χ_x nie zu einer injektiven reellen Matrix führen kann. In der Tat ist χ_x mal die erste Zeile gerade χ_t mal die zweite Zeile. Dahinter versteckt sich natürlich der Erzeuger $\chi_x \mathbf{e}_1 - \chi_t \mathbf{e}_2$ des Syzygienmoduls der Zeilen von $T_2[\chi_t, \chi_x]$ bzw. die Tatsache, daß in den Yang-Mills-Gleichungen potentiell eine Integrabilitätsbedingung versteckt sein könnte, die wir erhalten, wenn wir die erste Gleichung nach x , die zweite nach t ableiten und dann die Differenz nehmen.¹⁷

Anmerkung 22 Aus geometrischer Sicht sollte man die „Variablen“ χ als die Komponenten einer Einsform $\chi = \sum_{i=1}^n \chi_i dx_i$ auffassen und kann dann auch das Hauptsymbol als ein intrinsisches Objekt definieren. Uns geht es aber hier darum, zu algebraischen Objekten (insbesondere zu Polynomen) überzugehen, was die Wahl eines konkreten Koordinatensystems voraussetzt. Die geometrische Interpretation von χ wird dann wichtig, wenn man den Effekt von Koordinatentransformationen $\tilde{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x})$ studieren möchte. Schreibt man $\chi = \sum_{i=1}^n \tilde{\chi}_i d\tilde{x}_i$ in den neuen Koordinaten, dann gilt bekanntlich

$$\chi_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\chi}_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}. \quad (36)$$

¹⁶ Mathematisch steckt dahinter die Tatsache, daß man die prolongierten Symbole \mathcal{N}_{q+r} als homogene Komponenten eines Komoduls \mathcal{N} über der polynomialen Koalgebra betrachten kann. Der Symbolmodul \mathcal{U} kann dann mit dem Annulator \mathcal{N}^0 identifiziert werden. Diese Sichtweise wurde in [20] eingeführt; mehr Details sind in [30] und [32, Chapt. 7] zu finden.

¹⁷ Da diese Rechnung trivialerweise Null liefert, sind die Yang-Mills-Gleichungen formal integrabel. Wenn wir aber Terme niedrigerer Ordnung hinzufügen, dann erhalten wir ein System, das immer noch dasselbe Hauptsymbol besitzt, aber im allgemeinen nicht mehr formal integrabel ist.

Man rechnet leicht nach, daß das Einsetzen dieser Transformationsgleichungen in das Hauptsymbol dieselbe Matrix liefert wie eine direkte Berechnung des Hauptsymbols aus der transformierten Differentialgleichung.

Unsere bisherige Diskussion der Symbole scheint von den gewählten Koordinaten \mathbf{x} bzw. \mathbf{u} abzuhängen. Man kann aber zeigen, daß man nach einer *generischen* Koordinatentransformation immer dasselbe Ergebnis erhält; nur in speziellen, „schlechten“ Koordinaten bekommt man falsche Resultate (man spricht von dem Problem der δ -Regularität des Koordinatensystems, einer Verallgemeinerung des klassischen Charakteristikenbegriffs). Verfahren für eine effektive Konstruktion „guter“ Koordinaten werden in [9, 10] diskutiert. Eine intrinsische Behandlung der Symbole ist mittels homologischer Algebra möglich: auf der Ebene des geometrischen Symbols führt dies zur *Spencer-Kohomologie* [33], auf der Ebene des Hauptsymbols zur dualen *Koszul-Homologie*. Für Details verweisen wir auf [30] und [32, Chapt. 6] sowie die dort angegebenen Referenzen.

9 Unter- und Überbestimmte Differentialgleichungen

Nun setzen wir endlich die eingeführte Theorie ein, um eine formale Definition der Begriffe unter-, wohl- bzw. überbestimmt formulieren. Dazu benutzen wir das Hauptsymbol $T_q[\chi]$ und betrachten es als eine durch $\chi \in \mathbb{R}^n$ parametrisierte reelle Matrix. Unsere Klassifikation beruht darauf, wie deren Eigenschaften von χ abhängen. Wichtig ist hierbei, daß unsere Definition voraussetzt, daß eine formal integrable Differentialgleichung vorliegt. Andernfalls kann es passieren, daß nur durch Hinzufügen einer versteckten Integrabilitätsbedingung eine scheinbar unterbestimmte Gleichung plötzlich überbestimmt wird.

Definition 23 Die formal integrable Differentialgleichung $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, heißt *unterbestimmt*, wenn es keinen Vektor $\chi \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $T_q[\chi]$ eine injektive Abbildung definiert. \mathcal{R}_q ist *wohlbestimmt*, wenn es einen Vektor $\chi \in \mathbb{R}^n$ gibt, für den $T_q[\chi]$ eine bijektive Abbildung definiert. In allen anderen Fällen ist \mathcal{R}_q *überbestimmt*.

Definition 23 ist zunächst überhaupt nicht intuitiv, aber wir werden im Rest dieses Abschnitts zeigen, daß sie in der Tat zu den erwarteten Ergebnissen führt. Sie enthält außerdem ein gewisses Maß an Konvention: wie das nächste Beispiel zeigt, geben wir Unterbestimmtheit Priorität gegenüber Überbestimmtheit, was man auch anders machen könnte. Wir wollen dadurch erreichen, daß jede Gleichung, bei der es frei wählbare Lösungskomponenten gibt, als unterbestimmt klassifiziert wird.

Beispiel 24 Wir betrachten die partielle Differentialgleichung $\mathcal{R}_1 \subset J_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ gegeben durch das System

$$u_x + v_t = 0, \quad w_x = 0, \quad w_t = 0. \quad (37)$$

Offensichtlich zerfällt dieses System in zwei unabhängige Teilsysteme, nämlich zum einen die Gleichung $u_x - v_t = 0$ und zum anderen in das System $w_x = w_t = 0$. Ersteres ist offensichtlich unterbestimmt, da entweder u oder v beliebig gewählt werden kann, während letzteres sicherlich als überbestimmt betrachtet werden muß. Es stellt sich nun die Frage, wie das Gesamtsystem klassifiziert werden sollte. Darauf gibt es keine eindeutige intuitive Antwort; Definition 23 zählt die Gleichung \mathcal{R}_1 zu den unterbestimmten Systemen.

In der Tat ist das Hauptsymbol von (37) die (3×3) -Matrix

$$T_1[\chi_x, \chi_t] = \begin{pmatrix} \chi_x & \chi_t & 0 \\ 0 & 0 & \chi_x \\ 0 & 0 & \chi_t \end{pmatrix} \quad (38)$$

und es ist leicht zu sehen, daß für $\chi \neq \mathbf{0}$ der Rang des Hauptsymbols immer 2 ist. Damit kann es nie eine injektive Abbildung definieren und die Gleichung ist unterbestimmt.

Betrachten wir noch die beiden oben angesprochenen Teilsysteme. Da sie entkoppelt sind, können wir sie als Untermannigfaltigkeiten von $J_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bzw. von $J_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$. Als Hauptsymbole erhalten wir dann

$$(\chi_x \ \chi_t) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_t \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Schon aus Dimensionsgründen ist klar, daß die erste Matrix unabhängig von der Wahl von χ_x und χ_t nie eine injektive Abbildung definieren kann. Also ist das erste Teilsystem unterbestimmt. Genauso leicht sieht man, daß die zweite Matrix zwar für jede Wahl $\chi \neq \mathbf{0}$ eine injektive Abbildung, aber nie eine bijektive Abbildung definiert.

Die Behandlung der beiden Teilsysteme in diesem Beispiel zeigt, daß wir in den klassischen Fällen die bekannten Ergebnisse reproduzieren. Wenn ein System weniger Gleichungen als unbekannte Funktionen enthält, dann ist das Hauptsymbol eine Matrix mit weniger Zeilen als Spalten und kann damit nie eine injektive Abbildung definieren. Bei mehr Gleichungen als unbekannt Funktionen besitzt das Hauptsymbol mehr Zeilen als Spalten. Falls die Spalten linear abhängig sind, ist das System trotzdem unterbestimmt. Andernfalls erhalten wir für alle $\chi \neq \mathbf{0}$ eine injektive, aber für kein χ eine bijektive Abbildung, so daß das System überbestimmt ist.

Ein quadratisches System, also ein System mit genau so vielen Gleichungen wie unbekannt Funktionen kann nie überbestimmt sein. Denn bekanntlich folgt für eine quadratische Matrix aus der Injektivität sofort die Bijektivität. Der wohlbestimmte Fall wird durch den nachfolgenden Satz, der schon in Abschnitt 4 angesprochen wurde, noch einmal genauer charakterisiert. Hier sehen wir auch implizit den klassischen Begriff einer *Charakteristik* auftauchen. In Rahmen der formalen Theorie heißt $\chi \neq \mathbf{0}$ charakteristisch, wenn das Hauptsymbol $T[\chi]$ keine injektive Abbildung liefert. Der angegebene Beweis zeigt auf, daß diese Definition die klassische Idee einer Charakteristik als einer Richtung, bei der wir nicht nach allen zugehörigen ersten Ableitungen auflösen können, widerspiegelt.

Satz 25 *Eine Differentialgleichung \mathcal{R}_1 erster Ordnung ist genau dann wohlbestimmt, wenn sie durch eine Koordinatentransformation auf die Cauchy-Kovalevskaya-Form (3) gebracht werden kann.*

Beweis Wenn ein System in der Cauchy-Kovalevskaya-Form (3) vorliegt und damit eine ausgezeichnete unabhängige Variable t besitzt, dann wählen wir den Vektor χ so, daß $\chi_t = 1$ und alle anderen Komponenten verschwinden. Aus der Cauchy-Kovalevskaya-Form folgt sofort, daß für diese Wahl von χ das Hauptsymbol gerade die Einheitsmatrix ist und damit trivialerweise eine bijektive Abbildung definiert.

Für die umgekehrte Richtung müssen wir auf die in Anmerkung 22 angesprochene Interpretation von χ als den Komponenten einer Einsform zurückkommen. Nach Definition eines wohlbestimmten Systems muß ein Vektor χ existieren, so daß das Hauptsymbol bijektiv ist. Wir führen nun eine Koordinatentransformation durch, so daß χ übergeht in einen Vektor, bei dem eine Komponente den Wert 1 hat und alle anderen Komponenten verschwinden. Wenn wir die (neue) Variable, die der ausgezeichneten Komponente entspricht, t nennen, dann kann unser System in den neuen Koordinaten durch algebraische Umformungen auf Cauchy-Kovalevskaya-Form gebracht werden. \square

Wir wollen nun Definition 23 wieder etwas anschaulicher machen. Dabei ist unsere Grundidee, den Lösungsraum mit frei wählbaren Funktionen zu parametrisieren. Gerade bei partiellen Differentialgleichungen wird es ja nur selten möglich sein, alle Lösungen durch endlich viele Konstanten auszudrücken. Im Prinzip könnte man nun ein formal korrekt gestelltes Anfangswertproblem formulieren und sehen, wie viele frei wählbare Anfangsbedingungen darin auftreten. So würden wir in Beispiel 6 sagen, daß sich der Lösungsraum durch Angabe einer Funktion einer Variablen und einer Konstanten parametrisieren läßt. Damit ist der Lösungsraum der Differentialgleichung (9) größer als bei einer Gleichung ohne freie Funktionen, aber kleiner als bei einer Gleichung, bei der zwei Funktionen einer Variablen oder gar Funktionen zweier oder mehr Variablen auftreten.

Jetzt machen wir es uns etwas einfacher und nehmen an, daß sich die allgemeine Lösung (eigentlich auch ein notorisch schwierig zu präzisierender Begriff – siehe [32, Sect. 8.1] für eine Diskussion) der Differentialgleichung \mathcal{R}_q schreiben läßt in der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Psi \left(\dots, f_\lambda(\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_k(\mathbf{x})), \dots \right). \quad (40)$$

Hierbei steht f_λ für die frei wählbare Funktionen, während Ψ und die Argumente ϕ_j fest gewählte Ausdrücke sind, die im Falle der ϕ_j auch noch linear sein müssen. Die gezeigte Funktion f_λ hängt von k Argumenten ab. Als anschaulicheres Maß für die Größe des Lösungsraums kann man jetzt zählen, wie viele freie Funktionen mit wie vielen Argumenten in (40) auftreten. Die maximale Anzahl von Argumenten bei den freien Funktionen heißt das *Cartan-Geschlecht* d der Differentialgleichung; die Anzahl der freien Funktionen mit d Argumenten ist der *Allgemeinheitsgrad* e . Offensichtlich ist der Lösungsraum umso größer, je größer d und e sind, da diese die dominanten Terme angeben.

Das erste Problem mit diesem Zugang liegt in der Existenz einer Lösungsdarstellung der Form (40), die nur für Systeme erster Ordnung garantiert werden kann. Für allgemeinere Systeme muß man noch Ableitungen oder Integrale der Funktionen f_λ zulassen, was die Analyse weiter verkompliziert, und selbst dann existiert nicht immer eine solche Darstellung, wie ein berühmtes Beispiel von Hilbert [11] zeigt. Das zweite Problem ist die Nichteindeutigkeit solcher Darstellungen (die ja auch für formal korrekt gestellte Anfangswertprobleme gilt), wenn sie existieren. Wir wollen hier aber diese Fragen ignorieren – eine genauere Diskussion ist in [28] oder [32, Chapter 8] zu finden – und bemerken nur, daß man zeigen kann, daß die Zahlen d und e trotzdem wohldefiniert sind (während dies für die Anzahl der Funktionen f_λ mit weniger als d Argumenten nicht mehr gilt). Aus unserer bisherigen Diskussion kann man nun leicht folgende Charakterisierung von unter-, wohl- und überbestimmten Systemen ableiten.

Satz 26 *Sei $\mathcal{R}_q \subseteq J_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine Differentialgleichung der Ordnung q in n unabhängigen und m abhängigen Variablen mit Cartan-Geschlecht d und Allgemeinheitsgrad e . Die Gleichung \mathcal{R}_q ist genau dann unterbestimmt, wenn $d = n$. Sie ist genau dann wohlbestimmt, wenn $d = n - 1$ und $e = mq$. Wenn die Gleichung überbestimmt ist, gilt entweder $d < n - 1$ oder $e < mq$.*

Die oben erwähnten Probleme dieses anschaulichen Zugangs lassen sich vermeiden, in dem man auf die in Abschnitt 8 definierte Hilbert-Funktion zurückgreift. Zugleich läßt sich damit noch ein weiteres Problem lösen, nämlich die effektive Berechnung des Cartan-Geschlechts d und des Allgemeinheitsgrads e . Wie schon in Anmerkung 19 erwähnt, liefert die Dimension des prolongierten Symbols \mathcal{N}_{q+r} gerade die Anzahl der parametrischen Taylor-Koeffizienten der Ordnung $q + r$ in der formalen Potenzreihenlösung der Differentialgleichung \mathcal{R}_q . Mit anderen Worten: die Hilbert-Funktion H mißt auch die Größe des

formalen Lösungsraums – allerdings auf eine etwas abstraktere Art und Weise als das einfache Zählen frei wählbarer Funktionen.

Die Anzahl der Taylor-Koeffizienten der Ordnung q einer Funktion von k Argumenten ist durch einen Binomialkoeffizienten gegeben. Man kann nun leicht ausrechnen, wie viele freie Taylor-Koeffizienten in (40) in jeder Ordnung auftreten, und das Ergebnis mit der Hilbert-Funktion H der Differentialgleichung vergleichen. Ein bekannter Satz der Kommutativen Algebra besagt nun, daß für große Werte von r die Hilbert-Funktion $H(q+r)$ durch ein Polynom $h(q+r)$ mit rationalen Koeffizienten beschrieben werden kann. Auch dieses *Hilbert-Polynom* kann für polynomiale Moduln leicht explizit berechnet werden und obiger Vergleich liefert nach einiger Rechnerei folgendes Ergebnis, das noch einmal bestätigt, daß die Zahlen d und e in der Tat intrinsisch definiert sind.¹⁸

Satz 27 *Die Differentialgleichung \mathcal{R}_q habe das Hilbert-Polynom h . Wenn sich h schreiben läßt als $h(q+r) = \frac{c}{\ell!} r^\ell + \dots$, wobei die Punkte für Terme niedrigeren Grades stehen, dann gilt für das Cartan-Geschlecht $d = \ell$ und den Allgemeinheitsgrad $e = c$.*

Wenn wir wieder den Faktormodul $\mathcal{M} = \mathcal{P}^m / \mathcal{U}$ des Symbolmoduls \mathcal{U} aus dem letzten Abschnitt betrachten, dann können wir dieses Theorem in der Sprache der Kommutativen Algebra wie folgt ausdrücken: das Cartan-Geschlecht ist gerade $\dim \mathcal{M} + 1$ und der Allgemeinheitsgrad ist die Multiplizität von \mathcal{M} .

Beispiel 28 Wir wenden diese Überlegungen auf einige der Differentialgleichungen an, die wir bereits in Abschnitt 4 betrachtet haben. Das Hauptsymbol der Maxwell-Gleichungen ist die folgende (8×6) -Matrix:

$$T_1[\chi] = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_y & 0 & \chi_z & \chi_t & 0 \\ 0 & \chi_x & \chi_t & 0 & 0 & -\chi_z \\ \chi_t & 0 & 0 & -\chi_x & 0 & \chi_y \\ \chi_y & 0 & -\chi_z & 0 & 0 & \chi_t \\ -\chi_x & 0 & 0 & \chi_t & \chi_z & 0 \\ 0 & \chi_t & \chi_x & 0 & -\chi_y & 0 \\ \chi_z & 0 & \chi_y & 0 & \chi_x & 0 \\ 0 & \chi_z & 0 & \chi_y & 0 & \chi_x \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Dabei haben wir die Spalten wie folgt geordnet: zuerst kommen die z -Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} , dann die y -Komponenten und zum Schluß die x -Komponenten. Ein bißchen Rechnerei liefert das zugehörige Hilbert-Polynom:

$$h(1+r) = 2r^2 + 12r + 16. \quad (42)$$

Damit erhalten wir nach Satz 27 für das Cartan-Geschlecht $d = 3$ und für den Allgemeinheitsgrad $e = 4$. Wenn wir dies mit der Anzahl $n = 4$ der unabhängigen bzw. $m = 6$ der abhängigen Variablen vergleichen, dann sehen wir, daß zwar das Cartan-Geschlecht den „richtigen“ Wert $d = n - 1$ besitzt, aber der Allgemeinheitsgrad e ist zu klein für ein wohlbestimmtes System. Wir haben es also in der Tat mit einem überbestimmten System zu tun.

Bei den Maxwell-Gleichungen kann man leicht ausrechnen, daß sich die allgemeine Lösung durch 4 Funktionen von 3 Variablen sowie durch 2 Funktionen von 2 Variablen

¹⁸ Wenn man wirklich alle Probleme mit Lösungsdarstellungen der Form (40) vermeiden will, dann wird man Satz 27 für die *Definition* des Cartan-Geschlechts bzw. des Allgemeinheitsgrads benutzen und die Ableitung von Satz 27 für die einfachen Fälle, in denen die Existenz einer solchen Darstellung garantiert werden kann, als Motivation dieser Definition ansehen.

parametrisieren läßt. Diese Zahlen besitzen eine natürliche Interpretation über ein formal korrekt gestelltes Anfangswertproblem. Wenn wir die Divergenzgleichungen (7b) jeweils nach der z -Ableitung auflösen, dann können wir die x - und die y -Komponente beider Felder für $t = 0$, die z -Komponenten aber nur für $t = z = 0$ vorschreiben, d.h. nicht im ganzen Raum. Damit bestehen die Cauchy-Daten aber genau aus 4 Funktionen von 3 Variablen sowie aus 2 Funktionen von 2 Variablen.

Bei den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (5) erhalten wir mit $n = m = 4$ die Werte $d = e = 3$, so daß es sich um ein überbestimmtes System handelt, da wir nur drei der vier unbekannt Funktionen für $z = 0$ vorgeben können.¹⁹ Wieder finden wir also das erwartete Cartan-Geschlecht $d = n - 1 = 3$, aber einen zu niedrigen Allgemeinheitsgrad. In der Tat ergeben die meisten überbestimmten Systeme aus der Praxis ähnliche Resultate, da ein System schon ziemlich stark überbestimmt sein muß, um zu einem kleineren Cartan-Geschlecht zu führen.²⁰

Bei den Yang-Mills-Gleichungen (8) in der Ebene gilt $n = m = 2$ und das zugehörige Hilbert-Polynom liefert $d = 2$ und $e = 1$. Damit handelt es sich also um ein unterbestimmtes System. Hier kann man auch leicht den Allgemeinheitsgrad e auf der Basis unserer Diskussion in Beispiel 5 erklären. Dort haben wir gesehen, daß die Unterbestimmtheit von der $U(1)$ -Eichsymmetrie herrührt, die durch eine Funktion $\Lambda(x, t)$ parametrisiert wird, und e gibt genau die Anzahl dieser „Eichparameter“ wieder. Dieser Zusammenhang zwischen Allgemeinheitsgrad und Eichsymmetrien wird in [29] ausführlicher diskutiert (siehe auch [32, Sect. 8.3]). Dort wird auch gezeigt, wie man die Ergebnisse für die Yang-Mills- bzw. für die Maxwell-Gleichungen formal verknüpfen kann, da letztere eine eichinvariante Form der ersteren darstellen.

10 Zusammenfassung

Wir haben anhand einfacher Beispiele aufgezeigt, daß bei allgemeinen Systeme von Differentialgleichungen eine Reihe von Phänomenen auftreten, die in vielen klassischen Lehrbüchern ignoriert werden, da diese sich rein auf wohlbestimmte Systeme beschränken (ohne aber diese Einschränkung zu thematisieren). Es zeigte sich, daß eine mathematisch befriedigende Definition der Begriffe unter- bzw. überbestimmt nicht so einfach möglich ist. Ein erstes Problem liegt darin, daß allgemeine Systeme in der Regel zunächst nicht unbedingt in formal integrierbarer (oder gar involutiver) Form vorliegen, so daß zunächst eine Vervollständigung durchgeführt werden muß, um alle versteckten Integrierbarkeitsbedingungen zu finden. Für partielle Differentialgleichungen ist es jedoch nicht trivial zu beweisen, daß immer eine endliche Vervollständigung möglich ist. Wir haben hier eine Kombination aus geometrischer und algebraischer Theorie angerissen, die es ermöglicht, effektive Algorithmen zu entwickeln und deren Terminierung zu zeigen.

¹⁹ Aus formaler Sicht müssen wir die Navier-Stokes-Gleichungen eigentlich als System zweiter Ordnung behandeln, so daß für ein wohlbestimmtes System sogar $e = 8$ gelten müßte. Aber selbst wenn wir den Diffusionsterm in (5) weglassen – also zu den Euler-Gleichungen übergehen –, um ein System erster Ordnung zu erhalten, bleibt es bei der Überbestimmtheit. Außerdem können wir für die Navier-Stokes-Gleichungen aufgrund ihres parabolischen Charakters nur ein formales Anfangswertproblem mit der „Zeit“ z betrachten.

²⁰ Wenn dies der Fall ist, dann hat man es meistens mit dem entgegengesetzten Extrem zu tun, nämlich einem *maximal überbestimmten* System mit $d = 0$. Man spricht hier auch von *Systemen vom endlichen Typ*, da ihr formaler Lösungsraum endlich-dimensional ist. Solche Systeme treten vor allem bei inversen Problemen oder aber in differentialgeometrischen Anwendungen auf, da sie als ein (Ehresmann-)Zusammenhang auf einer gefaserten Mannigfaltigkeit interpretiert werden können.

Für verschiedene Sätze mußten wir den stärkeren Begriff eines involutiven Systems heranziehen, den wir aber hier nicht definieren konnten. Wir wollen hier nur erwähnen, daß es hierbei um weitere algebraische Eigenschaften des Symbolmoduls (insbesondere dessen Koszul-Homologie) geht. Wenn eine Differentialgleichung \mathcal{R}_q formal integrierbar, aber noch nicht involutiv ist, dann kann man zeigen, daß nach endlich vielen Prolongationen eine äquivalente involutive Gleichung \mathcal{R}_{q+r} vorliegt. Etwas überraschend stellt sich heraus, daß es mittels des sogenannten Cartan-Tests leichter fällt, Involution anstelle von formaler Integrierbarkeit effektiv nachzuweisen. Von der praktischen Seite her ist Involution wichtig für den Beweis von Eindeutigkeitsaussagen oder die Formulierung formal korrekt gestellter Anfangswertprobleme.

Begriffe wie unter- oder überbestimmt beziehen sich in natürlicher Weise auf die Größe des Lösungsraums. Ein zweites Problem ist nun, daß bei Differentialgleichungen dieser aber von dem betrachteten Funktionenraum und dem benutzten Lösungsbegriff (sind auch irgendwelche Formen schwacher Lösungen zulässig?) abhängt. Hier haben wir es uns leicht gemacht und uns auf den formalen Lösungsraum zurückgezogen, dessen Größe sich dann auf der Basis unserer geometrisch-algebraischen Techniken mit Standardverfahren wie Hilbert-Funktionen erfassen läßt. Dadurch konnte unsere sehr technische und unanschauliche Definition unter- bzw. überbestimmter Systeme wieder mit intuitiven Vorstellungen in Übereinstimmung gebracht werden.

Wir haben hier die Frage nach einer strengen Definition unter- bzw. überbestimmter Systeme als Motivation benutzt, um Konzepte der formalen Theorie zu erläutern. Man kann sich über den praktischen Wert einer solchen Definition sicherlich streiten; daß es sich hierbei nicht nur um „Spielchen“ handelt, zeigt die Tatsache, daß Einstein sich viele Jahre mit solchen Fragen beschäftigt hat. So ließ er sich um 1930 in seinem Briefwechsel [2] mit Cartan dessen Theorie involutiver Systeme erläutern (ohne sie allerdings zu benutzen) und entwickelte dann Mitte der fünfziger Jahre in einem Anhang von [5] sein eigenes Maß für die Größe des formalen Lösungsraums, die sogenannte Stärke einer Differentialgleichung. Diese besitzt zwar nicht dieselbe Aussagekraft wie der Cartansche Zugang, berücksichtigt dafür aber den Effekt von Eichsymmetrien (siehe [28] für einen Vergleich der beiden Ansätze).

Zum Abschluß wollen wir noch betonen, daß die hier vorgestellten geometrischen und algebraischen Methoden zur Analyse von Differentialgleichungen nicht in Konkurrenz zu den verbreiteten funktionalanalytischen Techniken stehen, sondern diese komplementieren. So erleichtert eine Vervollständigung eigentlich immer eine nachfolgende funktionalanalytische Untersuchung. Z.B. konnte in [17] gezeigt werden, daß viele Probleme mit dem Begriff der Elliptizität für nicht-normale Systeme einfach daher rühren, daß versteckte Integrierbarkeitsbedingungen ignoriert werden (vgl. Anmerkung 2). In der Literatur werden hier vielfach umständliche Neudefinitionen von Elliptizität auf der Basis nicht-intrinsischer Gewichte für Gleichungen und unbekannte Funktionen benutzt. Tatsächlich simulieren diese nur (teilweise) das Ergebnis einer Vervollständigung, was aber nicht immer ausreichend ist, um den elliptischen Charakter einer Gleichung zu erkennen.

Literatur

1. Brenan, K., Campbell, S., Petzold, L.: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Classics in Applied Mathematics 14. SIAM, Philadelphia (1996)
2. Cartan, E., Einstein, A.: Lettres sur la Parallélisme Absolue 1929–1932, edited by R. Debever. Palais des Académies, Bruxelles (1979)
3. Ehresmann, C.: Les prolongements d'une variété différentiable. Comp. Rend. Acad. Sci. **233**, 598–600, 777–779, 1081–1083 (1951)

4. Ehresmann, C.: Les prolongements d'une variété différentiable. *Comp. Rend. Acad. Sci.* **234**, 1028–1030, 1424–1425 (1951)
5. Einstein, A.: *The Meaning of Relativity*, 5th edn. Princeton University Press, Princeton (1956)
6. Gerdt, V., Blinkov, Y.: Involutive bases of polynomial ideals. *Math. Comp. Simul.* **45**, 519–542 (1998)
7. Golubitsky, M., Guillemin, V.: *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14. Springer-Verlag, New York (1973)
8. Greuel, G.M., Pfister, G.: *A SINGULAR Introduction to Commutative Algebra*. Springer-Verlag, Berlin (2002)
9. Hausdorf, M., Sahbi, M., Seiler, W.: δ - and quasi-regularity for polynomial ideals. In: J. Calmet, W. Seiler, R. Tucker (eds.) *Global Integrability of Field Theories*, pp. 179–200. Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe (2006)
10. Hausdorf, M., Seiler, W.: An efficient algebraic algorithm for the geometric completion to involution. *Appl. Alg. Eng. Comm. Comp.* **13**, 163–207 (2002)
11. Hilbert, D.: Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **73**, 95–108 (1912). (auch: *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, S. 81–93)
12. Hörmander, L.: *Linear Partial Differential Operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. Springer-Verlag, Berlin (1969)
13. Hubert, E.: Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms. II: Differential systems. In: F. Winkler, U. Langer (eds.) *Symbolic and Numerical Scientific Computation*, Lecture Notes in Computer Science 2630, pp. 40–87. Springer-Verlag, Berlin (2003)
14. Janet, M.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. *J. Math. Pure Appl.* **3**, 65–151 (1920)
15. John, F.: *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 1. Springer-Verlag, New York (1982)
16. Krasilshchik, I., Lychagin, V., Vinogradov, A.: *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gordon & Breach, New York (1986)
17. Krupchyk, K., Seiler, W., Tuomela, J.: Overdetermined elliptic systems. *Found. Comp. Math.* **6**, 309–351 (2006)
18. Kunkel, P., Mehrmann, V.: *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*. EMS Textbooks in Mathematics. EMS Publishing House, Zürich (2006)
19. Kunz, E.: *Einführung in die Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie*. Vieweg studium 46. Vieweg (1980)
20. Lambe, L., Seiler, W.: Differential equations, Spencer cohomology, and computing resolutions. *Georg. Math. J.* **9**, 723–772 (2002)
21. Lewy, H.: An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. Math.* **66**, 155–158 (1957)
22. Oberst, U., Pauer, F.: The constructive solution of linear systems of partial difference and differential equations with constant coefficients. *Multidim. Syst. Signal Proc.* **12**, 253–308 (2001)
23. Olver, P.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics 107. Springer-Verlag, New York (1986)
24. Rabier, P., Rheinboldt, W.: Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. In: P. Ciarlet, J. Lions (eds.) *Handbook of Numerical Analysis*, vol. VIII, pp. 183–540. North-Holland, Amsterdam (2002)
25. Renardy, M., Rogers, R.: *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics 13. Springer-Verlag, New York (1993)
26. Riquier, C.: *Les Systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles*. Gauthier-Villars, Paris (1910)
27. Saunders, D.: *The Geometry of Jet Bundles*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 142. Cambridge University Press, Cambridge (1989)
28. Seiler, W.: On the arbitrariness of the general solution of an involutive partial differential equation. *J. Math. Phys.* **35**, 486–498 (1994)
29. Seiler, W.: Involution and constrained dynamics III: Intrinsic degrees of freedom count. *Tech. Mech.* **20**, 137–146 (2000)
30. Seiler, W.: Spencer cohomology, differential equations, and Pommaret bases. In: M. Rosenkranz, D. Wang (eds.) *Gröbner Bases in Symbolic Analysis*, Radon Series on Computation and Applied Mathematics 2, pp. 171–219. Walter de Gruyter, Berlin (2007)
31. Seiler, W.: A combinatorial approach to involution and δ -regularity I: Involutive bases in polynomial algebras of solvable type. *Appl. Alg. Eng. Comm. Comp.* **20**, 207–259 (2009)
32. Seiler, W.: *Involution — The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra*. Algorithms and Computation in Mathematics 24. Springer-Verlag, Berlin (2009)
33. Spencer, D.: Overdetermined systems of linear partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **75**, 179–239 (1969)
34. Sturmfels, B., White, N.: Computing combinatorial decompositions of rings. *Combinatorica* **11**, 275–293 (1991)
35. Tsujishita, T.: Formal geometry of systems of differential equations. *Sugaku Exp.* **3**, 25–73 (1990)