Formale Theorie partieller Differentialgleichungen

Werner M. Seiler

Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme, Universität Karlsruhe, 7500 Karlsruhe 1
Bitnet: KG04 at DKAUNI2

1 Einleitung

Ein klassisches Problem der angewandten Mathematik von großer praktischer Bedeutung liegt in der Berechnung der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung. Mit dem Aufkommen der Computeralgebra erfuhr diese Aufgabe noch eine Verschärfung: Die Konstruktion der Lösung soll *algorithmisch* erfolgen. Diese Forderung erweist sich jedoch als zu stark, so daß man sich mit geringeren Zielen zufrieden geben muß.

In der moderneren mathematischen Literatur findet sich nicht viel zu dieser Thematik. Hier liegt der Schwerpunkt auf Existenz- und Eindeutigkeitssätzen. Solche Sätze in größerer Allgemeinheit zu formulieren, erfordert aber eine Abschwächung des Begriffs einer Lösung und führt so z.B. zur Distributionentheorie oder zur Theorie der Sobolev-Räume. Das erlaubt jedoch kein konstruktives Arbeiten mehr.

In der älteren Literatur (damit ist gemeint etwa Mitte bis Ende des letzten Jahrhunderts) erfolgte eine viel stärkere Betonung konstruktiver Verfahren. So stammen viele der Methoden und Tricks zum Lösen von Differentialgleichungen aus jener Zeit. Es fehlte jedoch eine allgemeine Theorie, die die Behandlung größerer Klassen von Gleichungen ermöglicht. Die Fundamente der meisten, heute in der Computeralgebra verwendeten Algorithmen wurden aber bereits damals gelegt. Als Beispiel möchte ich nur die Entwicklung der Theorie der Lie-Gruppen nennen, die im Zuge der Suche nach einer Galois-Theorie für Differentialgleichungen erfolgte.

Die vorliegende Übersichtsarbeit soll kurz die Probleme von Lösungsalgorithmen darstellen und einige in der Computeralgebra verwendete mathematische Verfahren zur Behandlung von Differentialgleichungen vorstellen. Der Schwerpunkt wird dabei auf formalen Methoden liegen, d.h. auf Methoden, die keinen Gebrauch von expliziten Lösungen machen. Die formale Theorie im engeren Sinne behandelt der letzte Abschnitt. Einen ausführlichen Überblick mit zahlreichen Referenzen vermittelt der Artikel von Singer [21], der auch auf viele offene Fragen hinweist.

2 Aufbau und Probleme von Lösungsalgorithmen

Üblicherweise versteht man unter einem Algorithmus ein Verfahren, das aus zulässigen Eingaben nach einer festen Vorschrift in endlich vielen Schritten Ausgabewerte berechnet. Um ein solches Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen zu entwickeln, reicht jedoch die in der Einleitung gegebene Formulierung des Problems nicht aus. Vor allem die Forderung des Terminierens bewirkt starke Einschränkungen.

Als erstes muß daher eine *genaue Spezifikation* des Problems erfolgen. Das erfordert insbesondere die Beantwortung folgender zwei Fragen: Welche Klasse von Differentialgleichungen soll der Algorithmus behandeln und zu welcher Funktionenklasse sollen die Lösungen gehören? Eine Antwort könnte z.B. sein: homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus einem Differentialkörper und liouvillesche Funktionen. Dies sind – vereinfacht ausgedrückt – alle Funktionen, die sich mit Hilfe von $+, -, *, /, \sqrt{\ }, \exp, \log$ sowie $\exp\int$ schreiben lassen. Im Prinzip gehören alle Ausdrücke dazu, die keine speziellen Funktionen wie z.B. Bessel-Funktionen enthalten.

Wie schon die angegebenen Beispiele zeigen, ist es hierbei wichtig, Klassen zu wählen, die auch effektiv behandelt werden können. Dies erklärt die große Bedeutung der Differentialalgebra für Lösungsalgorithmen. Algebraische Funktionenkörper eignen sich zum algorithmischen Rechnen wesentlich besser als die in der Funktionalanalysis üblichen Banach-Räume.

Das Terminieren des Algorithmus sichert in der Regel ein *Strukturtheorem*. Es liefert zum einen eine Entscheidungsprozedur für die Existenz von Lösungen, zum anderen gibt es eine endliche, konstruierbare Lösungsdarstellung an. Ein aus Anfängervorlesungen bekanntes Beispiel bildet die Integration rationaler Funktionen. Grob gesprochen, sagt hier das Strukturtheorem aus, daß sich die Stammfunktion einer rationalen Funktion als die Summe einer rationalen Funktion, mehrerer Logarithmen und mehrerer Arcustangens-Terme schreiben läßt.

Der eigentliche Lösungsalgorithmus nimmt dann die Form eines *konstruktiven Beweises* des Strukturtheorems an, denn dieser liefert gerade die gesuchte Vorschrift zur Konstruktion von Lösungen in der gewünschten Form. Die Mathematik, die dabei auftritt, hat meistens wenig mit Differential- und Integralrechnung zu tun. Die bekannten Algorithmen zur Integration algebraischer Funktionen beruhen z.B. wesentlich auf der algebraischen Geometrie; zur Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen benötigt man die Darstellungstheorie endlicher Gruppen.

Sucht man nach Lösungsalgorithmen in diesem strengen Sinne, so erlebt man eine Enttäuschung. Für größere Klassen von Differentialgleichungen existiert bisher *ein einziger*: der Singer-Algorithmus [20,23] (mittlerweile auch häufig als Kovačic-Singer-Ulmer-Algorithmus bezeichnet) zur Berechnung liouvillescher Lösungen homogener linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit Koeffizienten aus $K(x)$, wobei K eine endlich erzeugte Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Dieser Algorithmus entzog sich bisher einer Implementierung und seine Komplexität ist wohl auch zu groß, als daß er für Gleichungen höherer als dritter Ordnung vernünftig angewendet werden könnte.

Als Spezialfall des Singer-Algorithmus kann der unabhängig entwickelte Kovačic-Algorithmus [11] angesehen werden. Er behandelt Gleichungen zweiter Ordnung und wurde von Saunders in MACSYMA implementiert [18] (später auch von Bronstein in MAPLE). Die Tatsache, daß erst vor kurzem gezeigt werden konnte, daß er tatsächlich dem Singer-Algorithmus für den Fall $n = 2$ entspricht, demonstriert die Komplexität dieser Algorithmen. Wenn man andererseits bedenkt, daß es hier immer noch um einzelne *lineare gewöhnliche* Differentialgleichungen geht, kann man sich leicht ausmalen, was für eine Komplexität bei Algorithmen für Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zu erwarten ist.

Die Komplexität bildet aber nicht das einzige Problem. Elementare Überlegungen zeigen bereits, daß für allgemeinere Klassen von Differentialgleichungen in der Regel keine endlichen Lösungsdarstellungen mehr existieren. So besitzen z.B. lineare partielle Differentialgleichungen meistens unendlich dimensionale Lösungsräume. Chaotische Lösungen nichtlinearer Gleichungen passen sicherlich nicht in einen differentialalgebraischen Formalismus.

Eine große Rolle für den Singer-Algorithmus spielt auch die Tatsache, daß der Lösungsraum einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung die Struktur eines Vektorraums mit a priori bekannter endlicher Dimension besitzt. Bei nichtlinearen Gleichungen gilt dies nicht mehr. Es gibt lediglich die Klasse der Gleichungen mit einem nichtlinearen Superpositionsprinzip, d.h. Gleichungen, deren allgemeine Lösung sich (nichtlinear) durch endlich viele partikuläre Lösungen ausdrücken läßt. Ein Theorem von Lie bestimmt ihre allgemeine Form [12]. Für sie könnte man sich am ehesten eine Weiterentwicklung des Singer-Algorithmus vorstellen.

Denef und Lipshitz gelangten für Potenzreihenlösungen sogar zu wesentlich stärkeren Aussagen [6]. So konnten sie beweisen, daß das Problem, ob ein System polynomialer gewöhnlicher Differentialgleichungen eine *konvergente* Potenzreihenlösung besitzt, nicht entscheidbar ist. Dasselbe gilt ereits für die Frage, ob eine nichtverschwindende Lösung existiert. Ferner zeigten sie, daß es Systeme partieller Differentialgleichungen gibt mit unendlich vielen Potenzreihenlösungen, von denen keine berechenbar ist.

Selbst wenn für diese theoretischen Fragen befriedigende Antworten gefunden werden könnten, blieben noch eine Reihe von praktischen Problemen bei der Anwendung. Das beginnt bereits mit dem Speicherplatz. Schon bei den Integrationsalgorithmen zeigte sich, daß die Behandlung größerer Klassen von Funktionen zu extrem umfangreichen Programmen führt, die auf kleineren Anlagen nicht mehr installiert werden können.

Aus der Sicht eines Physikers liegt eine große Schwäche von Lösungsalgorithmen in dem Zwang, die Klasse der möglichen Lösungsfunktionen nach Kriterien der algebraischen Konstruierbarkeit auszuwählen. Es gibt keinen physikalischen Grund, von der Wellenfunktion eines Elektrons zu verlangen, daß sie liouvillesch sein soll. Ganz im Gegenteil ist es sogar zu erwarten, daß in Lösungen physikalisch interessanter Differentialgleichungen spezielle Funktionen der mathematischen Physik wie eben z.B. Bessel-Funktionen auftreten. Folgerichtig schreiben auch Davenport, Siret, Tournier [4]: *Solutions in finite form to a differential equation are very useful, if there are any. But there are no such solutions to most differential equations in physics.*

Als letztes möchte ich noch das Problem der Zweckmäßigkeit allgemeiner Lösungen von Differentialgleichungen erwähnen. Die Hauptmotivation für die Berechnung einer symbolischen Lösung an Stelle einer numerischen liegt in dem Gewinn an Einsicht und Verständnis. Es stellt sich nun die Frage, wieviel Einsicht eine Lösung vermitteln kann, deren Ausdruck mehrere Seiten Papier füllt? Die Lösung einer Differentialgleichung, die realistische Effekte beschreiben soll, wird in der Regel keine einfache Funktion sein, da sie sonst nicht die natürliche Komplexität der Phänomene wiedergeben kann.

Aus diesen Überlegungen lassen sich mehrere Konsequenzen für das praktische Arbeiten mit Differentialgleichungen ziehen:

- Lösungsalgorithmen sind zwar mathematisch sehr interessant aber für Anwender zu ineffizient und zu aufwendig.
- Man sollte versuchen, soweit wie möglich ohne explizite Lösungen auszukommen.
- Falls man wirklich eine Differentialgleichung lösen muß, ist es in der Regel günstiger, entweder numerische Methoden oder heuristische Algorithmen zu benutzen.

Die formale Theorie knüpft an den zweiten Punkt an. Bei vielen Anwendungen benötigt man eigentlich keine Lösung in geschlossener Form sondern daraus abgeleitete Größen wie z.B. Erhaltungssätze. Im weitesten Sinne beschäftigt sich die formale Theorie damit, solche Größen ohne die Kenntnis von Lösungen direkt durch Manipulationen der Gleichungen zu gewinnen.

3 Mathematische Methoden für Differentialgleichungen

Obwohl zur Zeit also nur ein echter Lösungsalgorithmus für Differentialgleichungen existiert, kennt die Computeralgebra zahlreiche Verfahren zu ihrer Behandlung. Die wenigsten davon sind algorithmisch; viele hängen von Heuristiken ab. Die angestrebten Ziele können sehr unterschiedlich seien. Zahlreiche Ansätze streben eine Vereinfachung des Ausgangsproblems an: nichtlineare Gleichungen sollen in lineare, partielle in gewöhnliche überführt werden; gekoppelte Gleichungen sollen entkoppelt werden; die Ordnung der Gleichungen soll reduziert werden.

Ein anderes Ziel liegt in der Entwicklung von Normalformen, die Klassifikationen ermöglichen. Eng damit verwandt ist das Äquivalenzproblem. In der mathematischen Physik interessiert man sich häufig für eine Überprüfung der (vollständigen) Integrabilität oder für die Konstruktion von Erhaltungsgrößen.

Die zur Zeit in der Computeralgebra für Differentialgleichungen benutzte Methoden lassen sich grob in drei Gruppen einteilen: differentialalgebraische, differentialgeometrische und sonstige. Viele Verfahren kombinieren natürlich Elemente aus mehreren Richtungen.

Innerhalb der Differentialalgebra [9,10] können wiederum zwei Strömungen unterschieden werden. Die differentielle Galois-Theorie versucht analog zur rein algebraischen Galois-Theorie, aus der differentiellen Galois-Gruppe Informationen über die Lösbarkeit der Gleichung zu gewinnen und diese zur Konstruktion der Lösung einzusetzen. Der Singer-Algorithmus stellt das prominenteste Ergebnis dieser Theorie dar.

Daneben gibt es die Theorie der Differentialpolynome, in der versucht wird, die kommutative Algebra und hier insbesondere die konstruktive Idealtheorie zu kopieren. Z.B. sucht man nach Gröbner-Basen für Differentialideale [2]. Das bereitet aber deutlich mehr Probleme als im algebraischen Fall, da der Ring der Differentialpolynome nicht mehr noethersch ist.

Trotzdem konnte diese Theorie bereits mit einigem Erfolg zum automatischen Schliessen und zum automatischen Beweisen eingesetzt werden. Die Grundlage bildet dabei die sogenannte Wu-Ritt-Methode [27]. Wu gelang es mit ihr z.B., das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den Kepler-Gesetzen herzuleiten [28].

Charakteristisch für differentialalgebraische Ansätze ist, daß nur die algebraischen Eigenschaften der Differentiation (d.h. Linearität und Leibnitz-Regel) eingehen. Differentialpolynome sind für beliebige Derivationen definiert. Im allgemeinen treten daher in der Differentialalgebra keine unabhängigen Variablen (nach denen abgeleitet wird) auf. In konkreten Anwendungen besitzt der zugrunde liegende Differentialkörper allerdings praktisch immer die Form $k(x)$ und die Ableitung nach x definiert die Derivation.

Die differentialgeometrischen Methoden orientieren sich an dem Ansatz der algebraischen Geometrie. Jeder Differentialgleichung[1] wird ein geometrisches Objekt (eine Untermannigfaltigkeit) im sogenannten Jetbündel [19] zugeordnet. Das Jetbündel kann man sich als einen Raum vorstellen, der neben den abhängigen und unabhängigen Variablen der Differentialgleichung auch die Ableitungen der abhängigen Variablen nach den unabhängigen als zusätzliche Koordinaten[2] besitzt. Die Differentialgleichung kann in diesem Raum als eine *algebraische* Gleichung angesehen werden, zu der natürlich eine Nullstellenvarietät gehört.

Dieser geometrische Ansatz erlaubt sofort in natürlicher Weise Symmetrien von Differentialgleichungen zu definieren: Symmetrien sind Transformationen, die die Untermannigfaltigkeit invariant lassen. Die Symmetrieanalyse von Differentialgleichungen ist rechentechnisch sehr aufwendig und fand daher erst mit dem Aufkommen der Computeralgebra starke Beachtung. Mittlerweile existieren bereits zahllose Programme hierfür. Ich möchte an dieser Stelle nur ein neueres Packet erwähnen, CRACKSTAR von Wolf [26]. Es stellt wohl das zur Zeit leistungsstärkste auf diesem Gebiet dar.

Im Rahmen dieser kurzen Übersicht kann nicht näher auf die Konstruktion und die Anwendung von Symmetrien eingegangen werden. Eine kurze Aufzählung von Stichpunkten sollte aber genügen, um die Vielzahl der Möglichkeiten zu demonstrieren; für genauere Informationen sei auf die Literatur [1,14] verwiesen:

- Symmetrien transformieren Lösungen wieder in Lösungen. Eine partikuläre Lösung erzeugt so eine ganze Familie von Lösungen.
- Durch Symmetriereduktion kann bei partiellen Differentialgleichungen die Anzahl der unabhängigen Variablen, bei gewöhnlichen die Ordnung reduziert werden.
- Das Noether-Theorem erlaubt die Konstruktion von Erhaltungsgrößen aus Symmetrien.
- Es gibt einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Separationsansätzen [13].
- Symmetrien besitzen eine große Bedeutung für das Äquivalenzproblem von Differentialgleichungen.
- Es gibt Zusammenhänge zwischen der Existenz von Symmetrien und der vollständigen Integrabilität [7].
- ...

Man kann ohne Übertreibung feststellen, daß für nichtlineare partielle Differentialgleichungen praktisch alle systematischen Ansätze und Techniken auf Symmetriemethoden beruhen.

[1] Wenn im folgenden von einer Differentialgleichung gesprochen wird, ist damit immer auch ein System von Differentialgleichungen gemeint.

[2] Diese neuen Koordinaten sind von den alten *algebraisch* unabhängig. *Differentiell* sind sie natürlich abhängig, was den großen Unterschied zur algebraischen Geometrie bewirkt.

Zu den sonstigen Methoden zählen in erster Linie Potenzreihenansätze und die Analyse von Singularitäten. Reihenlösungen in der Umgebung von Singularitäten berechnet z.B. das Programm DESIR der Gruppe um Della Dora [4,5]. Eine ganz andere Anwendung von Singularitäten besteht in der Painlevé-Analyse [8], die in letzter Zeit vor allem im Zusammenhang mit der vollständigen Integrabilität [25] wieder viel Aufmerksamkeit gefunden hat. Hierbei wird untersucht, ob die Lösung bewegliche Singularitäten enthält, d.h. Singularitäten, deren Lage von den Anfangsbedingungen abhängt. Daneben gibt es z.B. noch Versuche mit Integraltransformationen und vieles mehr (siehe [21]).

4 Formale Theorie

Im Sinne der obigen Definition von formalen Methoden als Verfahren, die ohne explizite Lösungen auskommen, gehören praktisch alle im letzten Abschnitt erwähnten Methoden zur formalen Theorie. Meistens versteht man jedoch unter der formalen Theorie ein viel engeres Gebiet. Den größten Teil davon enthalten die Bücher von Pommaret [15,16], die auch Anwendungen in der theoretischen Physik bringen. Etwas andere Schwerpunkte setzt die Schule von Vinogradov [22,24], auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Die formale Theorie benutzt die differentialgeometrische Definition einer Differentialgleichung, verwendet aber auch viele abstrakte algebraische Methoden wie z.B. die Spencer-Cohomologie. Während ihr theoretischer Rahmen schon weit ausgebaut ist, fehlt es noch an praktischen Anwendungen. Ansätze hierzu existieren bisher in erster Linie in der Kontrolltheorie. Durch ihre starke Algebraisierung erscheint die formale Theorie jedoch sehr gut für die Computeralgebra geeignet. Der größte Teil der Theorie ist auch konstruktiv.

Im Zentrum der Theorie steht der Begriff der *formalen Integrabilität*[3]. Eine anschauliche Interpretation liefert die Aussage, daß es nur bei formal integrablen Systemen möglich ist, für das Cauchy-Problem eine formale Potenzreihenlösung Ordnung für Ordnung auszurechnen. Die Betonung liegt dabei auf *Ordnung für Ordnung* und nicht auf Potenzreihe. Die formale Theorie hat nichts mit den oben erwähnten Reihenansätzen zu tun.

Aus Platzgründen kann ich wieder nur eine Reihe von Stichpunkten erwähnen und verweise für alle Details auf die oben angegebene Literatur. Obige, anschauliche Deutung der formalen Integrabilität legt nahe, daß für analytische, formal integrable Systeme ein sehr allgemeiner Existenzsatz gilt (Cartan-Kähler-Theorem), da dann die Konvergenz der formalen Potenzreihenlösung gezeigt werden kann. Alleine deshalb ist es schon interessant, mit formal integrablen Systemen zu arbeiten.

Alles andere als naheliegend ist dagegen der Satz, daß jede Differentialgleichung durch endlich viele Differentationen und Projektionen (Eliminationen) in ein lösungsäquivalentes, formal integrables System überführt werden kann (Cartan-Kuranishi-Theorem). Bei den Projektionen entstehen neue, von den Ausgangsgleichungen unabhängige Differentialgleichungen. Man bezeichnet sie häufig als *Integrabilitätsbedingungen*, da sie durch Überkreuzableiten entstehen. Jede Lösung des ursprünglichen Systems erfüllt sie automatisch. Ein formal integrables System enthält alle seine Integrabilitätsbedingungen.

[3] Nicht zu verwechseln mit der oben erwähnten *vollständigen* Integrabilität!

In dem klassischen Beispiel von Janet [17]

$$u_{zz} + yu_{xx} = 0\,, \tag{1}$$
$$u_{yy} = 0 \tag{2}$$

ergeben sich die Bedingungen

$$u_{xxy} = 0\,, \tag{3}$$
$$u_{xxxx} = 0\,. \tag{4}$$

Das zugehörige, formal integrable System besteht daher aus allen Gleichungen vierter Ordnung, die aus (1)–(4) durch Differentation erzeugt werden können. Tatsächlich nimmt man hier jedoch sogar die Gleichungen fünfter Ordnung, um ein *involutives* System zu erhalten. Ich kann hier allerdings nicht auf den recht technischen Unterschied zwischen formal integrabel und involutiv[4] eingehen.

Nicht zu verwechseln mit den Integrabilitätsbedingungen sind die *Kompatibilitätsbedingungen* für die rechte Seite bei inhomogenen Systemen. So besitzt das System

$$\partial_i u(x) = f_i(x) \tag{5}$$

trivialerweise nur Lösungen, wenn für die Funktionen f_i

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \tag{6}$$

gilt. Ohne die Voraussetzung, daß das System involutiv ist, kann keine Aussage über die Anzahl und die Ordnung der auftretenden Kompatibilitätsbedingungen getroffen werden. Bei involutiven System bereitet weder das noch die explizite Konstruktion der Bedingungen Schwierigkeiten.

Durch die Überführung in ein formal integrables System kann die Dimension des Lösungsraums eines linearen Systems partieller Differentialgleichungen bestimmt werden. Insbesondere kann sofort entschieden werden, ob er endlich oder unendlich dimensional ist. Eine Information, die für viele Anwendungen eine große Bedeutung besitzt.

Eine hervorstechende Eigenschaft der formalen Theorie ist, daß für die konkrete Durchführung all dieser Rechnungen (Konstruktion eines äquivalenten, involutiven Systems, Bestimmung der Integrabilitäts- sowie der Kompatibilitätsbedingungen) lineare Algebra ausreicht. Die Verwendung formaler Methoden führt sie auf die Behandlung linearer Gleichungssysteme zurück. Ihre Anzahl und ihre Größe sowie das Auftreten symbolischer Einträge legen allerdings den Einsatz eines Computeralgebrasystems nahe.

In [17] werden all diese Fragen für obiges Beispiel von Janet abgehandelt. Eine der laufenden Arbeiten unserer Gruppe besteht in der Umsetzung des Cartan-Kuranishi-Theorems in einen Algorithmus und dessen Implementation in dem Computeralgebrasystem AXIOM. Dabei sollen auch sofort alle Kompatibilitätsbedingungen konstruiert werden.

[4] Der hier verwendete Begriff der Involutivität ist schärfer als der der Cartanschen Theorie [3]. Ein nach Cartan involutives System ist formal integrabel, da es alle seine Integrabilitätsbedingungen enthält. Es kann durch eine endliche Anzahl von Differentationen in ein involutives System im Sinne der formalen Theorie überführt werden.

Koordinatentransformationen $\bar{y} = \bar{y}(y)$, die durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden, bilden sogenannte Lie-Pseudogruppen. Ein prominentes Beispiel liefern die volumenerhaltenden Transformationen, die der Differentialgleichung $|\partial\bar{y}/\partial y| = 1$ ($|\partial\bar{y}/\partial y|$ bezeichne die Jacobi-Determinante) gehorchen. Als weiteres Beispiel seien die symplektischen Abbildungen der Mechanik genannt.

Diese und weitere für die theoretische Physik interessante Transformationsgruppen wurden bisher kaum für die Symmetrieanalyse von Differentialgleichungen herangezogen. Die formale Theorie bietet hierzu den nötigen Formalismus. Man muß dabei allerdings beachten, daß sie nur Transformationen der abhängigen Variablen betrachtet, während die herkömmliche Symmetrietheorie abhängige und unabhängige Variablen gleich behandelt. Dies rührt von dem Wunsch her, auch differentialalgebraische Methoden einsetzen zu können. Dort gibt es ja, wie bereits oben erwähnt, im allgemeinen keine unabhängigen Variablen.

Lie-Gruppen gehören als Spezialfall zu den Lie-Pseudogruppen. Bei ihnen sind die zugehörigen Differentialgleichungen vom endlichen Typ. Vernünftiges Arbeiten mit Lie-Pseudogruppen erfordert die formale Integrabilität der definierenden Gleichungen. Bei einer Symmetrieanalyse muß auch das zu untersuchende System formal integrabel sein. Die Verallgemeinerung der für Lie-Symmetrien entwickelten Methoden auf Lie-Pseudogruppen und die Entwicklung von Algorithmen zu ihrer praktischen Handhabung werden ein Schwerpunkt der künftigen Arbeit unserer Gruppe bilden.

Literatur

1. G.W. Bluman, S. Kumei: Symmetries and Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 81, Springer, New York 1989
2. G. Carrà Ferro: Gröbner Bases and Differential Algebra. *In:* Proc. AAECC-5, L. Huguet, A. Poli (Eds.), Lecture Notes in Computer Science 350, Springer, Berlin 1987, S. 129–140
3. E. Cartan: Sur la Theorié des Systémes en Involution et ses Applications à la Relativité. *In:* Oeuvres Complètes d'Elie Cartan, Partie II, Vol. 2, Gauthier-Villais, Paris 1953, S. 1199–1230 (Orginal: Bull. Soc. Math. France 59 (1931) 88–118)
4. J.H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier: Computer Algebra. Academic Press, London 1988
5. J. Della Dora, E. Tournier: Formal Solutions of Differential Equations in the Neighbourhood of Singular Points. *In:* Proc. SYMSAC '81, P.S. Wang (Ed.), ACM, New York 1981, S. 25–29
6. J. Denef, L. Lipshitz: Power Series Solutions of Algebraic Differential Equations. Math. Ann. 267 (1984)
7. A.S. Fokas: Symmetries and Integrability. Stud. Appl. Math. 77 (1987) 253–299
8. E.L. Ince: Ordinary Differential Equations. Dover, New York 1956
9. I. Kaplansky: An Introduction to Differential Algebra. Hermann, Paris 1957
10. E.R. Kolchin: Differential Algebra and Algebraic Groups. Academic Press, New York 1973
11. J.J. Kovačic: An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations. J. Symb. Comp. 2 (1986) 3–43
12. S. Lie, G. Sheffers: Vorlesungen über Continuierliche Gruppen. Teubner, Leipzig 1893
13. W. Miller: Mechanisms for Variable Separation in Partial Differential Equations and their Relationship to Group Theory. *In:* Symmetries and Nonlinear Phenomena, D. Levi, P. Winternitz (Eds.), World Scientific, Singapur 1988, S. 188–221
14. P.J. Olver: Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics 107, Springer, New York 1986

15. J.F. Pommaret: Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. Gordon&Breach, London 1978
16. J.F. Pommaret: Differential Galois Theory. Gordon&Breach, London 1983
17. J.F. Pommaret, A. Haddak: Effective Methods for Systems of Algebraic Partial Differential Equations. *In:* Proc. MEGA '90, T. Mora, C. Traverso (Eds.), Birkhäuser, Boston 1991, S. 411–426
18. B.D. Saunders: An Implementation of Kovačic's Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations. *In:* Proc. SYMSAC '81, P.S. Wang (Ed.), ACM, New York 1981, S. 105–108
19. D.J. Saunders: The Geometry of Jet Bundles. London Mathematical Society Lecture Notes Series 142, Cambridge University Press, Cambridge 1989
20. M.F. Singer: Liouvillian Solutions of n-th Order Homogeneous Linear Differential Equations. Am. J. Math. 103 (1981) 661–682
21. M.F. Singer: Formal Solutions of Differential Equations. J. Symb. Comp. 10 (1990) 59–94
22. T. Tsujishita: Formal Geometry of Systems of Differential Equations. Sugaku Expositions 3 (1990) 25–73
23. F. Ulmer: On Liouvillian Solutions of Linear Differential Equations. *Erscheint in:* Appl. Alg. Eng. Comm. Comp.
24. A.M. Vinogradov: The $\mathcal{C}$-Spectral Sequence, Langrangian Formalism, and Conservation Laws. I. The Linear Theory. II. The Nonlinear Theory. J. Math. Anal. Appl. 100 (1984) 1–40, 41–129
25. J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale: The Painlevé Property for Partial Differential Equations. J. Math. Phys. 24 (1983) 522–526
26. T. Wolf: A Package for the Analytic Investigation and Exact Solution of Differential Equations. *In:* Proc. EUROCAL '87, J.H. Davenport (Ed.), Lecture Notes in Computer Science 378, Springer, Berlin 1987, S. 479–490
27. Wu W.-T.: A Constructive Theory of Differential Algebraic Geometry based on works of J.F. Ritt with Particular Applications to Mechanical Theorem Proving of Differential Geometries. *In:* Proc. Differential Geometry and Differential Equations, Shanghai 1985, G. Chaohao, M. Berger, R.L. Bryant (Eds.), Lecture Notes in Mathematics 1255, Springer, Berlin 1987, S. 173–189
28. Wu W.-T.: Automatic Derivation of Newton's Gravitational Laws from Kepler's Laws. *In:* Academica Sinica Mathematics-Mechanization Research Preprints 1 (1987) 53